Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2016-17, II semestre
11 aprile, 2017

CP110 Probabilità: Esonero 1

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nota:

1. L'unica cosa che si può usare durante l'esame è una penna o una matita. Tutto il resto (calcolatrice, libri, appunti, altri fogli di carta, ...) deve essere messo da parte.
2. Risposte implicite sotto forma di coefficienti binomiali, potenze, esponenziali ecc. sono benvenute. Mostrate in dettaglio il vostro lavoro.
3. Non parlate durante l'esame. Copiare o far copiare non è tollerabile.
4. Scrivete il vostro nome su ogni pagina. In caso di utilizzo di piu' pagine per un singolo esercizio indicare chiaramente l'ordine.
5. Il punteggio massimo per ogni esercizio è indicato nel testo. Notare che già con quattro esercizi risolti correttamente si arriva vicino al trenta.

Buon lavoro!

esercizio	1	2	3	4	5	totale
punti						
su	7	7	7	7	8	36

Nome:______________________________________

1. **(7 punti)** Consideriamo un mazzo di carte francesi ben mischiato. Definiamo gli eventi

$$A = \{\text{le prime 5 carte sono tutte rosse}\},$$
$$B = \{\text{le prime 3 carte contengono un tris}\},$$
$$C = \{\text{l'ultima carta è un asso}\}.$$

(a) A e B sono indipendenti ?
(b) A e C sono indipendenti ?
(c) B e C sono indipendenti ?

Soluzione:

1. Un tris contiene necessariamente una carta nera, e dunque $A \cap B = \emptyset$. Allora

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0 \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B),$$

e dunque A e B non sono indipendenti.

2. Abbiamo 4 assi su 52 possibilità per l'ultima carta, dunque $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{13}$. Ci sono 26 carte rosse su 52 totali. Quindi

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{26}{5}}{\binom{52}{5}}.$$

Calcoliamo ora $\mathbb{P}(A \cap C)$. In totale ci sono 52 possibilità per l'ultima carta, e per ogni scelta fra queste ci sono $\binom{51}{5}$ scelte (non ordinate) delle prime cinque carte. Quindi il denominatore vale $52 \times \binom{51}{5}$. Per fare $A \cap C$ di queste dobbiamo scegliere fra 4 possibili assi per l'ultima carta, e una volta fissato l'asso dobbiamo scegliere 5 carte fra le carte rosse rimanenti. Se l'asso scelto era rosso rimangono 25 carte rosse, se l'asso scelto era nero ne rimangono 26. Allora

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{2 \times \binom{25}{5} + 2 \times \binom{26}{5}}{52 \times \binom{51}{5}}$$

Usando le relazioni $\binom{n-1}{k} = \binom{n}{k} \times \frac{n-k}{n}$, si vede che

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{\binom{26}{5}}{\binom{52}{5}} \times \frac{1}{13} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C),$$

e dunque A, C sono indipendenti.

3. Procediamo allo stesso modo. Ci sono $13 \times \binom{4}{3} = 52$ possibili tris in un mazzo (13 per la scelta del tipo di tris e $\binom{4}{3}$ per la scelta delle carte che lo compongono). Allora

$$\mathbb{P}(B) = \frac{52}{\binom{52}{3}}.$$

Calcoliamo ora $\mathbb{P}(B \cap C)$. Per l'ultima carta abbiamo 52 possibilità, e per ogni scelta fra queste ci sono $\binom{51}{3}$ scelte (non ordinate) delle prime tre carte. Il denominatore allora vale $52 \times \binom{51}{3}$. L'evento $B \cap C$ ha cardinalità $\#(B \cap C) = 4 \times (12 \times \binom{4}{3} + 1) = 196$, dove 4 sono i possibili assi per l'ultima carta, $12 \times \binom{4}{3}$ sono i possibili tris di carte diverse da assi, mentre 1 è l'unico tris di assi che rimane disponibile. In conclusione

$$\mathbb{P}(B \cap C) = \frac{196}{52 \times \binom{51}{3}} = \frac{52}{\binom{52}{3}} \times \frac{1}{13} = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C),$$

e dunque B, C sono indipendenti.

Nome:____

2. **(7 punti)** Supponiamo che le emails ricevute tra le ore 8:00 e le ore 20:00 dal vostro account di posta elettronica siano distribuite secondo un processo di Poisson di parametro $\lambda = 10$. Calcolare:

   (a) La probabilità di non ricevere alcun messaggio tra le 8:00 e le 9:00.

   (b) La probabilità condizionata di non ricevere alcun messaggio tra le 8:00 e le 9:00 sapendo che non è stato ricevuto alcun messaggio tra le 8:00 e le 8:30.

   (c) La probabilità di ricevere almeno un messaggio tra le 19:30 e le 20:00.

Soluzione: Se $\lambda = 1$ per un periodo di 12 ore allora avremo che per un'ora il numero di chiamate segue una distribuzione di Poisson di parametro $\lambda' = 10/12 = 5/6$. Dunque la probab. in (a) vale

$$e^{-5/6} \approx 0.43.$$

Allo stesso modo il numero di messaggi tra le 8:00 e le 8:30 è una variabile di Poisson di parametro $\lambda'' = 5/12$. Allora la probab. in (b) vale

$$\frac{e^{-\frac{5}{6}}}{e^{-\frac{5}{12}}} = e^{-\frac{5}{12}} \approx 0.66$$

e la probab. in (c) vale

$$1 - e^{-\frac{5}{12}} \approx 0.34.$$

Nome:_______________________________________

3. **(7 punti)** Uno studente affronta un test con 4 domande a risposta multipla. Supponiamo che indipendentemente per ogni domanda lo studente conosca la risposta esatta con probabilità 0.5, e che a una domanda di cui non conosce la risposta esatta, tirando a indovinare risponda comunque in maniera corretta con probabilità 0.2.

   (a) Calcolare il valore atteso del numero di risposte corrette.

   (b) Calcolare la probabilità che risponda correttamente a 3 domande.

   (c) Calcolare la probabilità che abbia tirato a indovinare 2 volte sapendo che ha risposto a 3 domande correttamente.

Soluzione: (a). Consideriamo una singola domanda. Se E è l'evento che si conosca la risposta esatta e F è l'evento di rispondere correttamente, allora

$$\begin{aligned} P(F) &= P(F|E)P(E) + P(F|E^c)P(E^c) \\ &= 1 \times P(E) + 0.2 \times P(E^c) = 0.5 + 0.2 \times 0.5 = 0.6 \end{aligned}$$

Poiché le prove sono indipendenti e ogni prova ha probabilità di succeso $p = 0.6$, se X è il numero di risposte corrette, allora X è una binomiale di parametri $n = 4$ e $p = 0.6$, dunque il numero medio è

$$np = 2.4.$$

(b). Essendo X binomiale abbiamo

$$P(X = 3) = \binom{4}{3}(0.6)^3(0.4)^1 = 0.3456.$$

(c). Sia Y il numero di domande di cui lo studente non conosce la risposta esatta e X il numero di risposte corrette. In maniera equivalente si può definire Y come il numero di volte che lo studente tira a indovinare. Allora vogliamo

$$P(Y = 2|X = 3) = \frac{P(Y = 2, X = 3)}{P(X = 3)} = \frac{P(X = 3|Y = 2)P(Y = 2)}{P(X = 3)}$$

Conosciamo $P(X = 3)$. Inoltre Y è una binomiale di parametri $n = 4$ e $p = 0.5$, dunque

$$P(Y = 2) = \binom{4}{2}2^{-4} = 0.375.$$

Resta da calcolare $P(X = 3|Y = 2)$. Se ci sono due risposte a caso, allora il numero di risposte corrette vale $X = 2 + Z$ dove Z è una binomiale di parametri $n = 2$ e $p = 0.2$. Infatti se due risposte sono date a caso, le altre due sono sicuramente corrette e abbiamo $Z = 0, 1, 2$ ulteriori risposte corrette dai due tentativi a caso. Se $X = 3$ allora $Z = 1$, quindi

$$P(X = 3|Y = 2) = P(Z = 1) = 2 \times (0.2)(0.8) = 0.32.$$

In conclusione,

$$P(Y = 2|X = 3) = \frac{0.32 \times 0.375}{0.3456} \approx 0.347.$$

Nome:____

4. **(7 punti)** Lanciamo ripetutamente due dadi.

   (a) Quanti lanci occorrono in media per ottenere una somma uguale a 7 ?

   (b) Quanti lanci occorrono in media per ottenere 4 e 3 ?

   (c) Qual'è la probabilità che la prima volta che si ha 4 e 3 sia anche la prima volta che la somma è uguale a 7 ?

Soluzione: (a). Sia T_7 il primo tempo in cui la somma vale 7. Allora T_7 è una variabile geometrica di parametro $p_7 = 1/6$ e quindi $E[T_7] = 1/p_7 = 6$.

(b). Sia $T_{4,3}$ il primo tempo in cui si ha 4 e 3. La probabilità di avere 4 e 3 in un lancio vale $2/36 = 1/18$. Allora $T_{4,3}$ è una variabile geometrica di parametro $p_{4,3} = 1/18$ e quindi $E[T_{4,3}] = 1/p_{4,3} = 18$.

(c). Poiché $\{T_7 = T_{4,3}\} = \cup_{k=1}^{\infty}\{T_7 = T_{4,3} = k\}$ si ha

$$P(T_7 = T_{4,3}) = \sum_{k=1}^{\infty} P(T_7 = T_{4,3} = k).$$

L'evento $\{T_7 = T_{4,3} = k\}$ coincide con l'evento "i primi $k-1$ lanci danno somma diversa da 7 e il k-esimo lancio dà 4 e 3". Allora $P(T_7 = T_{4,3} = k) = (1-p_7)^{k-1}p_{4,3}$. Dunque

$$P(T_7 = T_{4,3}) = \sum_{k=1}^{\infty}(1-p_7)^{k-1}p_{4,3} = \frac{p_{4,3}}{p_7} = \frac{1}{3}.$$

Nome:____________________________________

5. **(8 punti)** Abbiamo 9 paia di scarpe. Ogni singola scarpa viene colorata indipendentemente dalle altre con un colore scelto a caso fra $\{\text{blu}, \text{rosso}, \text{giallo}\}$. Calcolare

   (a) il valore atteso del numero di paia dello stesso colore

   (b) il valore atteso del numero di paia con una scarpa rossa e una gialla

   (c) il valore atteso del numero di paia di scarpe rosse sapendo che si hanno 3 scarpe sinistre rosse e 3 scarpe destre rosse.

Soluzione: (a). Sia $n = 9$. Per $1 \leqslant i \leqslant n$, consideriamo un successo l'evento di avere che nel paio di scarpe i-esimo si hanno due scarpe dello stesso colore. Questo evento ha probabilità $p = 3 \times (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{3}$. Allora, se X è il numero di scarpe monocolore, X è una binomiale di parametri n e p e dunque

$$\mathbb{E}[X] = np = 3.$$

(b). Per un dato paio di scarpe, la probabilità di avere una scarpa gialla e una rossa è $q = 2 \times (\frac{1}{3})^2 = \frac{2}{9}$. Se Y è il numero di paia di questo tipo, allora Y è una binomiale di parametri n e q e dunque $\mathbb{E}[Y] = nq = 2$.

(c). Sia Z il numero di paia di scarpe entrambe rosse e sia R l'evento di avere 3 scarpe sinistre rosse e 3 scarpe destre rosse. Vogliamo calcolare il valore atteso di Z condizionato all'evento R:

$$\mathbb{E}[Z|R] = \sum_{k=0}^{9} k\,\mathbb{P}(Z = k|R) = \sum_{k=1}^{3} k\,\mathbb{P}(Z = k|R),$$

dove abbiamo usato il fatto che $P(Z > 3|R) = 0$. Chiamiamo S l'insieme delle scarpe sinistre rosse, e D l'insieme delle scarpe rosse. Notiamo che $S, D \subset \{1, \ldots, 9\}$, e che entrambi hanno 3 elementi se si verifica R. Condizionatamente all'evento R allora S e D sono indipendentemente scelti a caso tra tutti i sottoinsiemi di $\{1, \ldots, 9\}$ con 3 elementi. Inoltre $Z = k$ se e solo se $D \cap S$ contiene k elementi. Se $k = 3$, allora $Z = 3$ equivale a $S = D$. Le possibili scelte di S sono $\binom{9}{3}$, e lo stesso vale per D. Allora

$$\mathbb{P}(Z = 3|R) = \mathbb{P}(D = S|R) = \frac{\binom{9}{3}}{\binom{9}{3}^2} = \frac{1}{\binom{9}{3}} = \frac{1}{84}.$$

Per $k = 2$ dobbiamo sommare su tutte le scelte di sottoinsiemi che hanno due elementi in comune. I due elementi nell'intersezione si possono scegliere in $\binom{9}{2}$ modi e poi rimangono $\binom{7}{1}$ modi per la scelta del restante elemento di D e di seguito $\binom{6}{1}$ per il restante elemento di S (non potendo prendere lo stesso elemento scelto per d). Dunque

$$\mathbb{P}(Z = 2|R) = \mathbb{P}(|D \cap S| = 2|R) = \frac{\binom{9}{2}\binom{7}{1}\binom{6}{1}}{\binom{9}{3}^2} = \frac{18}{84}.$$

Infine per $\mathbb{P}(Z = 1|R)$ dobbiamo scegliere 1 elemento in comune e poi due elementi per D e due elementi differenti per S, quindi

$$\mathbb{P}(Z = 1|R) = \mathbb{P}(|D \cap S| = 1|R) = \frac{\binom{9}{1}\binom{8}{2}\binom{6}{2}}{\binom{9}{3}^2} = \frac{45}{84}.$$

In conclusione $\mathbb{E}[Z|R] = \frac{1}{84}(3 \times 1 + 2 \times 18 + 45) = 1$.

Nome:____