Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2018-19, II semestre
9 aprile, 2019

CP210 Introduzione alla Probabilità: Esonero 1

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nota:

1. L'unica cosa che si può usare durante l'esame è una penna o una matita. Tutto il resto (calcolatrice, libri, appunti, altri fogli di carta, ...) deve essere messo da parte.
2. Risposte implicite sotto forma di coefficienti binomiali, potenze, esponenziali ecc. sono benvenute. Mostrate in dettaglio il vostro lavoro.
3. Non parlate durante l'esame. Copiare o far copiare non è tollerabile.
4. Scrivete il vostro nome su ogni pagina. In caso di utilizzo di piu' pagine per un singolo esercizio indicare chiaramente l'ordine.
5. Il punteggio massimo per ogni esercizio è indicato nel testo. Notare che già con quattro esercizi risolti correttamente si arriva vicino al trenta.

Buon lavoro!

esercizio	1	2	3	4	5	totale
punti						
su	7	7	7	7	7	35

Nome:____________________________________

1. **(7 punti)** Consideriamo un mazzo di carte francesi ben mischiato. Calcolare:

   (a) La probabilità che le prime 2 carte estratte non contengano assi.

   (b) La probabilità che le prime 5 carte estratte contengano 2 assi.

   (c) La probabilità che le prime 2 carte estratte non contengano assi sapendo che le prime 5 carte estratte contengono 2 assi.

Soluzione:

1. Sia E l'evento "le prime due carte non contengono assi". Per le prime due carte (non ordinate) abbiamo in totale $\binom{52}{2}$ possibilità, e di queste $\binom{48}{2}$ non contengo no assi. Allora la probab. richiesta vale

$$P(E) = \frac{\binom{48}{2}}{\binom{52}{2}}.$$

2. Sia F l'evento "le prime 5 carte contengono 2 assi". Per le prime 5 carte (non ordinate) abbiamo $\binom{52}{5}$ possibilità. Per l'evento F allora ne abbiamo $\binom{4}{2} \times \binom{48}{3}$. Dunque

$$P(F) = \frac{\binom{4}{2}\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}}$$

3. Vogliamo calcolare

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}.$$

$E \cap F$ è l'evento "no assi nelle prime due e 2 assi nelle seconde tre". Se consideriamo separatamente l'estrazione delle prime due carte (non ordinate) e quella delle successive tre carte (non ordinate) abbiamo un totale di $\binom{52}{2} \times \binom{50}{3}$ possibilità. Di queste, $\binom{48}{2} \times \binom{4}{2}\binom{46}{1}$ soddisfano l'evento $E \cap F$. Allora

$$P(E \cap F) = \frac{\binom{48}{2}\binom{4}{2}\binom{46}{1}}{\binom{52}{2}\binom{50}{3}}.$$

Allora

$$P(E|F) = \frac{\frac{\binom{48}{2}\binom{4}{2}\binom{46}{1}}{\binom{52}{2}\binom{50}{3}}}{\frac{\binom{4}{2}\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}}} = \frac{\binom{52}{5}\binom{48}{2}\binom{46}{1}}{\binom{52}{2}\binom{50}{3}\binom{48}{3}} = \frac{3}{10}.$$

Allo stesso risultato si può arrivare scrivendo

$$P(E|F) = P(F|E)\,\frac{P(E)}{P(F)},$$

e usando il fatto che

$$P(F|E) = \frac{\binom{4}{2}\binom{46}{1}}{\binom{50}{3}}$$

è la probab. che da un mazzo di 50 carte contenente 4 assi le prime 3 carte estratte contengono 2 assi.

Nome:_______________________________________

2. **(7 punti)** Un portiere di una squadra di calcio riceve in media 18 tiri nello specchio della porta ogni 90 minuti. Supponendo che i tiri in porta arrivino secondo un processo di Poisson, calcolare:

   (a) Il numero medio di tiri in porta nei primi 45 minuti.

   (b) La probabilità di non avere tiri in porta nei primi cinque minuti della partita.

   (c) La probabilità condizionata di avere 2 tiri in porta nei primi 10 minuti sapendo che non ci sono stati tiri in porta nei primi cinque minuti.

Soluzione: Se la media su 90 minuti è 18, allora la media su 45 minuti è 9.

Il numero di tiri in porta nei primi cinque minuti è una v.a. di Poisson di parametro λ tale che $\lambda * 90/5 = 18$, e dunque $\lambda = 1$. Allora la probab. in (b) vale e^{-1}.

Se $A = \{2 \text{ tiri in porta nei primi 10 minuti}\}$ e $B = \{0 \text{ tiri in porta nei primi 5 minuti}\}$, e $C = \{2 \text{ tiri in porta nei secondi 5 minuti}\}$ allora

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(C)P(B)}{P(B)} = P(C) = \tfrac{1}{2}\, e^{-1},$$

dove abbiamo usato $A \cap B = C \cap B$ con C, B indipendenti e il fatto che il numero di tiri in porta nei secondi cinque minuti della partita è una v.a. di Poisson con parametro $\lambda = 1$.

Nome:______________________________________

3. **(7 punti)** Una società offre tre tipi di contratto di lavoro (A,B,C) per 5 giorni consecutivi. Nel contratto A si richiede di lavorare 4 ore nei giorni di pioggia e 1 ora nei giorni di sole. Nel contratto B si lavora 5 ore ogni giorno, ma solo fino al primo giorno di sole incluso (ossia con la regola: se c'è un primo giorno di sole in uno dei 5 giorni, allora quello è l'ultimo giorno di lavoro, altrimenti si lavora per 5 giorni). Nel contratto C si lavora 4 ore al giorno, ma solo fino al secondo giorno di sole incluso (ossia: se c'è un secondo giorno di sole in uno dei 5 giorni, allora quello è l'ultimo giorno di lavoro, altrimenti si lavora per 5 giorni). Supponendo che ogni giorno è di sole o di pioggia indipendentemente con probabilità 1/2:

   (a) Calcolare, in ciascuno dei tre casi A,B,C, la probabilità di lavorare in tutto 20 ore.

   (b) Quale dei tre contratti ha il minor numero medio di ore di lavoro?

Soluzione: Siano X_A, X_B, X_C il numero di ore di lavoro nei tre casi. Nel primo caso X_A è $4 * N + (5 - N)$ dove N è il numero di giorni senza sole. Notiamo che N è una binomiale di parametri $n = 5, p = 1/2$ e dunque

$$P[X_A = 20] = P(N = 5) = 2^{-5},$$
$$E[X_A] = 4E[N] + (5 - E[N]) = 4(5/2) + 5/2 = \frac{25}{2}.$$

Nel secondo caso $X_B = 5 * N$ dove N è il numero di giorni necessari per avere il primo giorno di sole, con la regola che se non ci sono giorni di sole nei primi 5 giorni allora poniamo comunque $N = 5$. Formalmente possiamo scrivere $N = \min\{Y, 5\}$ dove Y è una geometrica di parametro 1/2. Notiamo che Y ha range $\{1, \dots, 5\}$ e la sua densità di probabilità soddisfa $p(k) = 2^{-k}$ per $k = 1, \dots, 4$. Se $k = 5$, l'evento $\{N = 5\}$ si può ottenere in due modi: a) $Y = 5$ che ha probabilità 2^{-5} e b) $Y > 5$, che ha probabilità 2^{-5}. Allora $p(5) = 2^{-5} + 2^{-5} = 2^{-4}$. Notiamo che $\sum_{k=1}^{5} p(k) = 1$. Per avere $X_B = 20$ si deve avere $N = 4$, allora

$$P(X_B = 20) = P(N = 4) = P(Y = 4) = 2^{-4}.$$

Inoltre $E[N] = \sum_{k=1}^{5} kp(k) = \frac{31}{16}$, e dunque

$$E[X_B] = 5 * E[N] = \frac{5 * 31}{16} = \frac{155}{16}.$$

Nel terzo caso $X_C = 4 * M$ dove M è il numero di giorni di lavoro. Notiamo che la variabile aleatoria M ha range $\{2, 3, 4, 5\}$ e la sua densità di probabilità soddisfa $p(k) = (k-1)2^{-k}$ per $k = 2, \dots, 4$. Infatti se $2 \leqslant k \leqslant 4$, per avere $M = k$ si deve avere una giornata di sole al k-esimo giorno e una sola giornata di sole nei primi $k - 1$ giorni (il primo evento ha probab. 1/2 e il secondo $(k-1)2^{-(k-1)}$). Questo ragionamento non vale per $k = 5$ poiché $M = 5$ si può ottenere in due casi disgiunti: a) la seconda giornata di sole è al quinto giorno, e b) nei cinque giorni c'è al più 1 giorno di sole. Il primo evento ha probab. $4 * 2^{-5}$ mentre il secondo ha probab. $2^{-5} + 5 * 2^{-5}$ e dunque $p(5) = 10 * 2^{-5}$. Formalmente possiamo scrivere $M = \min\{Y, 5\}$ dove Y è una binomiale negativa di parametri 2 e 1/2. In conclusione:

$$p(k) = (k-1)2^{-k}, \; k = 2, \dots, 4. \quad p(5) = 10 * 2^{-5}.$$

Notiamo che $\sum_{k=2}^{5} p(k) = 1$. Allora otteniamo

$$P(X_C = 20) = P(M = 5) = p(5) = 5/16.$$

Per il valore atteso calcoliamo

$$E[X_C] = 4 * E[M] = 4 \sum_{k=2}^{5} kp(k) = 4\,\frac{57}{16} = \frac{57}{4}.$$

Dunque B ha il numero medio minore dei tre.

Nome:______________________________________

4. **(7 punti)** Ad ogni unità di tempo lanciamo due monete A,B. La moneta A è equa mentre la B ha probabilità 2/3 di uscire "testa" e 1/3 di uscire "croce". Consideriamo il numero di lanci T necessario per ottenere per la prima volta un risultato diverso per le due monete (ossia: testa/croce oppure croce/testa). Calcolare:

   (a) La probabilità che $T = k$, per $k = 1, 2, \ldots$.

   (b) Il valore atteso di T.

   (c) La probabilità che al tempo T la moneta A sia "testa" e la moneta B sia "croce" ?

Soluzione: (a). Ogni lancio delle due monete ha 4 possibili esiti per la coppia (A,B), ossia $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$ con l'interpretazione $(0,1) =$ "croce per A e testa per B" etc. Sia $p = 2/3$. Allora a ogni lancio

$$P(0,0) = \frac{1}{2}(1-p),\ P(0,1) = \frac{1}{2}p,\ P(1,0) = \frac{1}{2}(1-p)\,,\ P(1,1) = \frac{1}{2}p.$$

La probab. di avere un risultato diverso nelle due monete vale $P(0,1) + P(1,0) = \frac{1}{2}$. Dunque T è una v.a. geometrica di parametro $\frac{1}{2}$, ossia

$$P(T = k) = 2^{-k}.$$

(b). Il valore atteso di T è $E[T] = \sum_{k=1}^{\infty} k 2^{-k} = 2$.

(c). Sia E l'evento {al tempo T la moneta A è "testa" e la moneta B è "croce"}. Allora

$$P(E) = \sum_{k=1}^{\infty} P(E \cap \{T = k\})$$

L'evento $E \cap \{T = k\}$ coincide con l'evento "i primi $k-1$ lanci danno $(0,0)$ oppure $(1,1)$ e il k-esimo lancio dà (1,0)". Allora

$$P(E \cap \{T = k\}) = (P(0,0) + P(1,1))^{k-1} P(1,0) = (1/2)^{k-1}(1-p)/2.$$

Dunque

$$P(E) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}(1-p) = (1-p) = \frac{1}{3}.$$

Nome:____

5. **(7 punti)** Si consideri la passeggiata aleatoria che parte nell'origine e che a ogni passo si sposta di $+1$ con probabilità p e di -1 con probabilità p. Sia S_n la posizione dopo n passi. Calcolare, in funzione del parametro $p \in [0, 1]$:

   (a) Il valore atteso di S_n

   (b) La varianza di S_n.

   (c) La probabilità di essere di nuovo nell'origine dopo n passi.

Soluzione: (a). Sia X il numero di passi a destra dopo n passi totali. Allora $S_n = X-(n-X) = 2X - n$. Inoltre X è una binomiale di parametri n e p. Allora

$$E[S_n] = 2E[X] - n = 2np - n = n(2p - 1).$$

(b). La varianza vale

$$\mathrm{Var}[S_n] = 4\mathrm{Var}[X] = 4np(1 - p).$$

(c). Abbiamo $S_n = 0$ se e solo se $X = n/2$. Dunque, se n è dispari si ha $P(S_n = 0) = 0$. Se n è pari si ha

$$P(S_n = 0) = P(X = n/2) = \binom{n}{n/2} p^{n/2}(1 - p)^{n/2}.$$

Nome:____