Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2020-21, II semestre
22 aprile, 2021

CP210 Introduzione alla Probabilità: Esonero 1

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nota:

1. L'unica cosa che si può usare durante l'esame è una penna o una matita. Tutto il resto (calcolatrice, libri, appunti, altri fogli di carta, ...) deve essere messo da parte.
2. Risposte implicite sotto forma di coefficienti binomiali, potenze, esponenziali ecc. sono benvenute. Mostrate in dettaglio il vostro lavoro.
3. Non parlate durante l'esame. Copiare o far copiare non è tollerabile.
4. Scrivete il vostro nome su ogni pagina. In caso di utilizzo di piu' pagine per un singolo esercizio indicare chiaramente l'ordine.
5. Il punteggio massimo per ogni esercizio è indicato nel testo. Notare che già con quattro esercizi risolti correttamente si arriva vicino al trenta.

Buon lavoro!

esercizio	1	2	3	4	5	totale
punti						
su	7	7	7	7	7	35

Nome:______________________________________

1. **(7 punti)** Estraiamo una carta da un mazzo di carte francesi ben mischiato e dividiamo le restanti 51 carte in tre mazzetti da 17 carte ciascuno. Calcolare la probabilità che:

   (a) la carta estratta sia un asso e che ogni mazzetto contenga uno dei restanti tre assi;

   (b) uno dei mazzetti contenga quattro assi.

Soluzione:
Possiamo visualizzare le 52 carte come una permutazione di 52 oggetti distinti, tale che la prima posizione è la prima carta estratta, le successive 17 posizioni sono il primo mazzetto, eccetera.

1. Sia E l'evento al punto 1. Per soddisfare E la permutazione deve essere tale che la prima posizione è un asso (ci sono 4 assi e una posizione possibili), le 17 posizioni successive contengono esattamente un asso (ci sono 3 assi e 17 posizioni), le seguenti 17 contengono esattamente un asso (rimangono 2 assi e 17 posizioni), e le ultime 17 contengono esattamente un asso (rimane un solo asso e 17 posizioni). Una volta fissati i quattro assi e le loro posizioni dobbiamo scegliere la permutazione delle restanti 48 carte. Allora il numero di permutazioni che soddisfa E è dato da

$$\#E = 4 \times (3 \cdot 17) \times (2 \cdot 17) \times 17 \times 48!$$

Dunque

$$P(E) = \frac{\#E}{\#\Omega} = \frac{4 \times (3 \cdot 17) \times (2 \cdot 17) \times 17 \times 48!}{52!} \approx 0.018.$$

Per una soluzione alternativa (equivalente) si può ragionare usando le probabilità condizionate e calcolare

$$\begin{aligned} P(E) &= P(1 \text{ scartato})P(1 \text{ nel primo mazzo}|1 \text{ scartato})\times \\ &\times P(1 \text{ nel secondo mazzo}|1 \text{ nel primo mazzo e } 1 \text{ scartato})\times \\ &\times P(1 \text{ nel terzo mazzo}|1 \text{ nel primo mazzo, } 1 \text{ nel secondo mazzo e } 1 \text{ scartato}) \\ &= \frac{4}{52} \times \frac{3\binom{48}{16}}{\binom{51}{17}} \times \frac{2\binom{32}{16}}{\binom{34}{17}} \times 1 \approx 0.018. \end{aligned}$$

2. Sia F l'evento al punto 2. Il mazzetto in cui si trovano i 4 assi si può scegliere in 3 modi. Una volta scelto scegliamo una delle $\binom{17}{4}$ possibili posizioni degli assi in quel mazzetto. Poi scegliamo una delle 4! permutazioni per i quattro assi nelle posizioni che abbiamo fissato. Infine resta da scegliere una delle 48! permutazioni per le restanti carte. Allora il numero di permutazioni che soddisfa F è dato da

$$\#F = 3 \times \binom{17}{4} \times 4! \times 48!$$

Dunque

$$P(F) = \frac{\#F}{\#\Omega} = \frac{3 \times \binom{17}{4} \times 4! \times 48!}{52!} \approx 0.026.$$

Per una soluzione alternativa (equivalente) si può ragionare usando il fatto che la $P(F) = 3P(F_1)$ dove F_1 è l'evento che i 4 assi siano nel primo mazzetto. Considerando solo le 17 carte del primo mazzetto troviamo

$$P(F) = 3P(F_1) = 3 \times \frac{\binom{48}{13}}{\binom{52}{17}} \approx 0.026.$$

Nome:________________________________

2. **(7 punti)** Un giovane si prepara per l'esame teorico della patente, studiando per un numero di ore che va da 0 a 4. Sappiamo che la probabilità che superi l'esame vale $j/(2+j)$ dove j è il numero di ore passate a studiare. Supponendo che il numero di ore di studio è una variabile aleatoria uniformemente distribuita in $\{0,1,2,3,4\}$, calcolare:

   (a) La probabilità che superi l'esame.

   (b) La probabilità condizionata di aver studiato 2 ore sapendo che supera l'esame.

   (c) La probabilità condizionata di aver studiato piú di 1 ora sapendo che supera l'esame.

Soluzione:

1. Sia E_j l'evento "studia j ore" e sia A l'evento "supera l'esame". Allora $P(E_j) = 1/5$ per ogni $j \in \{0, 1, \ldots, 4\}$, e $P(A|E_j) = j/(2+j)$. Dunque

$$P(A) = \sum_{j=0}^{4} P(E_j)P(A|E_j) = \frac{1}{5}\sum_{j=0}^{4} \frac{j}{2+j} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5} + \frac{4}{6}\right) = \frac{21}{50}.$$

2. La probabilità condizionata di aver studiato 2 ore sapendo che supera l'esame si può scrivere come

$$P(E_2|A) = P(A|E_2)\frac{P(E_2)}{P(A)} = \frac{2}{4}\frac{\frac{1}{5}}{\frac{21}{50}} = \frac{5}{21}.$$

3. La probabilità condizionata di aver studiato piú di 1 ora sapendo che supera l'esame si può scrivere come

$$P(E_2 \cup E_3 \cup E_4|A) = 1 - P(E_0 \cup E_1|A) = 1 - P(E_1|A),$$

essendo $P(E_0|A) = 0$. Inoltre

$$P(E_1|A) = P(A|E_1)\frac{P(E_1)}{P(A)} = \frac{1}{3}\frac{\frac{1}{5}}{\frac{21}{50}} = \frac{10}{63}.$$

Allora la probabilità richiesta vale $1 - \frac{10}{63} = \frac{53}{63}$.

Nome:____

3. **(7 punti)** Un negozio apre alle 8 di mattina e i clienti arrivano secondo un processo di Poisson. Sapendo che in media arrivano 3 clienti ogni 30 minuti, calcolare:

   (a) Il numero medio di clienti tra le 8:00 e le 8:50.

   (b) La probabilità di non avere clienti tra le 8:30 e le 8:50.

   (c) La probabilità condizionata di avere almeno 2 clienti tra le 8:20 e le 8:30 sapendo che sono arrivati 3 clienti tra le 8:20 e le 8:50.

Soluzione: Se la media su 30 minuti è 3, allora la media su 50 minuti è 5. Possiamo usare il parametro $\lambda = 1/10$ se misuriamo il tempo in minuti.

Il numero di clienti tra le 8:30 e le 8:50 è una v.a. di Poisson di parametro $20\lambda = 2$ e dunque la probab. in (2) vale $e^{-\lambda} = e^{-2}$.

Siano $A = \{2 \text{ clienti tra le 8:20 e le 8:30}\}$, e $B = \{3 \text{ clienti tra le 8:20 e le 8:30}\}$, e definiamo $C = \{3 \text{ clienti tra le 8:20 e le 8:50}\}$. Allora la probab. richiesta in 3) è data da

$$P(A \cup B|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} + \frac{P(B \cap C)}{P(C)}.$$

Sappiamo che $P(C) = \frac{(30\lambda)^3}{3!}\, e^{-30\lambda} = \frac{9}{2}\, e^{-3}$. Inoltre per l'indipendenza

$$P(A \cap C) = P(A)P(1 \text{ cliente tra le 8:30 e le 8:50}\}) = \frac{(10\lambda)^2}{2!}\, e^{-10\lambda} \times \frac{(20\lambda)^1}{1!}\, e^{-20\lambda} = e^{-3}.$$

Allo stesso modo

$$P(B \cap C) = P(B)P(0 \text{ clienti tra le 8:30 e le 8:50}\}) = \frac{(10\lambda)^3}{3!}\, e^{-10\lambda} \times e^{-20\lambda} = \frac{1}{6}\, e^{-3}.$$

In conclusione

$$P(A \cup B|C) = \frac{2}{9}(1 + \frac{1}{6}) = \frac{7}{27}.$$

Nome:____

4. **(7 punti)** Quattro amici giocano un mini torneo di scacchi. Chi vince tra Alice e Bernardo (A, B) sfida in finale chi vince tra Claudio e Diana (C, D). In caso di pareggio la coppia che pareggia gioca un'altra partita fino a che non ci sia un vincitore. Per ogni possibile partita tra giocatore G_1 e giocatore G_2 sappiamo che la probabilità di pareggio è 0.4, e che la probabilità di vittoria di G_1 su G_2 è 0.4 se G_1 precede G_2 in ordine alfabetico, e 0.2 se G_2 precede G_1 in ordine alfabetico. Calcolare:

   (a) La probabilità di vincere il torneo per ciascun giocatore.

   (b) La probabilità condizionata che la finale sia AD sapendo che A vince il torneo.

   (c) Il valore atteso del numero di partite giocate in totale.

Soluzione:

1. Consideriamo una coppia di giocatori G_1, G_2 che si sfidano fino a che uno dei due giocatori vince. Supponiamo che G_1 preceda G_2 in ordine alfabetico. Allora, come già visto in altre situazioni analoghe, la probab. che tra G_1 e G_2 (dopo eventuali partite pareggiate) finisca per vincere G_1 è data da

$$p = \frac{0.4}{0.4 + 0.2} = \frac{2}{3}.$$

Infatti la probab. che G_1 vinca su G_2 alla k-esima partita dopo aver pareggiato le prime $k-1$ partite vale $(0.4)^{k-1} \times (0.4) = (0.4)^k$, e sommando su $k = 1, \ldots, \infty$ si ottiene

$$\sum_{k=1}^{\infty} (0.4)^k = \frac{2}{3}.$$

Dunque la finale sarà AC con probabilità p^2, AD con probab. $p(1-p)$, BD con probab. $(1-p)^2$, e BC con probab. $p(1-p)$. Allora

$$P(\text{vince } A) = p[p^2 + p(1-p)] = p^2 = \frac{4}{9}, \quad P(\text{vince } B) = p[p(1-p) + (1-p)^2] = p(1-p) = \frac{2}{9}.$$

Allo stesso modo troviamo

$$P(\text{vince } C) = p(1-p) = \frac{2}{9}, \quad P(\text{vince } D) = (1-p)^2 = \frac{1}{9}.$$

Osserviamo che le 4 probab. appena calcolate sommano correttamente a 1.

2. Calcoliamo

$$P(\text{finale } AD \,|\, \text{vince } A) = P(\text{vince } A \,|\, \text{finale } AD) \frac{P(\text{finale } AD)}{P(\text{vince } A)} = p \times \frac{p(1-p)}{p^2} = \frac{1}{3}.$$

3. Per ogni coppia G_1, G_2 il numero di partite giocate per decidere chi tra i due vince è una geometrica di parametro $1 - P(\text{pareggio}) = 0.6$. Dunque il numero medio di partite giocate per ciascun accoppiamento è $1/0.6 = 10/6$. Poiché si hanno 3 accoppiamenti in tutto il torneo, in media il numero totale di partite giocate è $30/6 = 5$.

Nome:______________________________________

5. **(7 punti)** Lanciamo 12 dadi. Calcolare:
   (a) La probabilità di ottenere esattamente due 6.
   (b) Il valore atteso del numero di 6.
   (c) La varianza del numero di 6.

Soluzione: Sia X il numero di 6 ottenuti. passi a destra dopo n passi totali. Allora X è una binomiale di parametri 12 e 1/6. Dunque

$$P[X = 2] = \binom{12}{2} \frac{1}{6^2} \frac{5^{10}}{6^{10}} \approx 0.296.$$

Inoltre il valore atteso e la varianza valgono

$$E[X] = 12 \times \frac{1}{6} = 2\,, \qquad \mathrm{Var}(X) = 12 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{3}.$$

Nome:______________________________________