Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2022-23, II semestre
12 aprile, 2023

CP210 Introduzione alla Probabilità: Esonero 1

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nota:

1. L'unica cosa che si può usare durante l'esame è una penna o una matita. Tutto il resto (calcolatrice, libri, appunti, altri fogli di carta, ...) deve essere messo da parte.
2. Risposte implicite sotto forma di coefficienti binomiali, potenze, esponenziali ecc. sono benvenute. Mostrate in dettaglio il vostro lavoro.
3. Non parlate durante l'esame. Copiare o far copiare non è tollerabile.
4. Scrivete il vostro nome su ogni pagina. In caso di utilizzo di piu' pagine per un singolo esercizio indicare chiaramente l'ordine.
5. Il punteggio massimo per ogni esercizio è indicato nel testo. Notare che già con quattro esercizi risolti correttamente si arriva vicino al trenta.

Buon lavoro!

esercizio	1	2	3	4	5	totale
punti						
su	7	7	7	7	7	35

Nome:____

1. **(7 punti)** Un giocatore lancia un dado ripetutamente fino a ottenere due volte di seguito la stessa faccia. Calcolare
   (a) La probabilità che il dado sia lanciato due volte.
   (b) La probabilità che il dado sia lanciato tre volte.
   (c) La probabilità condizionata che gli ultimi due lanci siano 6 sapendo che il gioco è terminato al terzo lancio.

Soluzione: Sia X il numero di lanci. Per avere $X = 2$ si deve avere 2 volte la stessa faccia su due lanci. Per esempio, la probabilità di avere due 6 su due lanci è $(1/6)^2$. Allo stesso modo la probabilità di avere due i su due lanci è $(1/6)^2$, per ogni $i = 1, \ldots, 6$. Dunque

$$P(X = 2) = 6 \times (1/6)^2 = 1/6.$$

Per avere $X = 3$ si deve avere al primo lancio i, $i = 1, \ldots, 6$ e al secondo e terzo lancio j, con $j = 1, \ldots, 6$, e $j \neq i$. Per ogni scelta di i e j si ha probabilità $(1/6)^3$ e ci sono 6×5 scelte possibili. Dunque

$$P(X = 3) = 6 \times 5 \times (1/6)^3 = 5/36.$$

Vogliamo calcolare $P(B|X = 3)$, dove B è l'evento che gli ultimi due lanci sono 6. Sia $A = B \cap \{X = 3\}$ l'evento che gli ultimi due lanci sono 6 e $X = 3$, in modo che $P(B|X = 3) = P(A)/P(X = 3)$. L'evento A equivale all'evento che su tre lanci il primo lancio è uguale a i per qualche $i = 1, \ldots, 5$ e i due lanci seguenti sono 6. Dunque

$$P(A) = 5 \times (1/6)^3.$$

In conclusione, $P(6|X = 3) = P(A)/P(X = 3) = 5 \times (1/6)^3 \times 36/5 = 1/6$.

Nome:____

2. **(7 punti)** Supponiamo di avere tre urne A, B e C. L'urna A contiene 4 palline rosse e 2 palline nere, l'urna B contiene 3 palline rosse e 3 palline nere, e l'urna C contiene 2 palline rosse e 4 palline nere. Si sceglie uniformemente a caso un'urna, e poi si estraggono a caso due palline, senza rimpiazzo, dall'urna scelta. Sia X il numero di palline nere estratte.

   (a) Scrivere la densità di probabilità di X.

   (b) Calcolare il valore atteso e la varianza di X

   (c) La probabilità condizionata di aver scelto l'urna A sapendo che $X = 2$.

Soluzione:

Si ha $X \in \{0, 1, 2\}$ e per $k \in \{0, 1, 2\}$ abbiamo

$$P(X = k|A) = \frac{\binom{2}{k}\binom{4}{2-k}}{\binom{6}{2}}, \quad P(X = k|B) = \frac{\binom{3}{k}\binom{3}{2-k}}{\binom{6}{2}}, \quad P(X = k|C) = \frac{\binom{4}{k}\binom{2}{2-k}}{\binom{6}{2}}$$

Dunque, usando $P(A) = P(B) = P(C) = 1/3$ si ha

$$P(X = k) = \frac{1}{3}\,\frac{\binom{2}{k}\binom{4}{2-k} + \binom{3}{k}\binom{3}{2-k} + \binom{4}{k}\binom{2}{2-k}}{\binom{6}{2}}.$$

In altri termini,

$$P(X = 0) = \frac{2}{9}, \qquad P(X = 1) = \frac{5}{9}, \qquad P(X = 2) = \frac{2}{9}.$$

Allora $E[X] = P(X = 1) + 2P(X = 2) = 1$. Inoltre $E[X^2] = P(X = 1) + 4P(X = 2) = \frac{13}{9}$. Allora $\mathrm{Var}[X] = \frac{13}{9} - 1 = \frac{4}{9}$.

Infine,

$$P(A|X = 2) = P(X = 2|A)\frac{P(A)}{P(X = 2)} = \frac{1}{15}\frac{1/3}{2/9} = \frac{1}{10}.$$

Nome:____

3. **(7 punti)** Un codice QR è formato prendendo una griglia quadrata 10×10 e colorando di nero o di bianco ciascuno dei 100 quadratini che formano la griglia. Supponiamo che ogni quadratino sia, indipendentemente, nero con probabilità 0.04 e bianco con probabilità 0.96. Sia X il numero di quadratini neri nel codice.

   (a) Calcolare il valore atteso di X;

   (b) Calcolare la probabilità condizionata che la prima riga sia tutta bianca sapendo che la prima colonna è tutta bianca;

   (c) Usando l'approssimazione di Poisson si scriva la probabilità che in tutto il codice ci siano al più 3 quadratini neri.

Soluzione: La X è una binomiale di parametrri $n = 100$ e $p = 0.04$. Allora $E[X] = 4$.

La prima riga e la prima colonna hanno intersezione in un solo quadrato e i restanti 9 della prima riga e 9 della prima colonna sono indipendenti. Dunque se A è l'evento che la prima riga sia tutta bianca e B è l'evento che la prima colonna sia tutta bianca, abbiamo

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{(0.96)^{10} \times (0.96)^9}{(0.96)^{10}} = (0.96)^9.$$

La probabilità condizionata che la prima riga sia tutta bianca sapendo che la prima colonna è tutta bianca

Se approssimiamo X con la Poisson di parametro $\lambda = E[X] = 4$ si ha

$$P(X \leqslant 3) \approx e^{-4} + 4e^{-4} + \frac{4^2}{2}e^{-4} + \frac{4^3}{6}e^{-4} = \frac{71}{3}\, e^{-4} \approx 0.43.$$

Nome:____

4. **(7 punti)** Abbiamo due monete in mano. Non riusciamo a distinguerle ma sappiamo che una è equa mentre l'altra ha probabilità 2/3 per "testa" e 1/3 per "croce". Scegliamo una delle monete a caso e la lanciamo 3 volte.

   (a) Calcolare il numero atteso di "teste" nei tre lanci

   (b) Sapendo che è uscita tre volte "testa" qual è la probabilità che sia la moneta equa ?

   (c) Sapendo che è uscita una volta "testa" qual è la probabilità che sia la moneta equa ?

Soluzione:

1. Sia A l'evento di aver scelto la moneta equa, e A^c l'evento di aver scelto la moneta sbilanciata. Sia X il numero di teste. Allora

$$P(X=k) = \frac{1}{2}\,P(X=k|A) + \frac{1}{2}\,P(X=k|A^c)$$
$$= \frac{1}{2}\binom{3}{k}\,2^{-3} + \frac{1}{2}\binom{3}{k}\,(2/3)^k(1/3)^{3-k}\,, \qquad k=0,1,2,3.$$

Allora

$$E[X] = \sum_{k=0}^{3} kP(X=k) = \frac{1}{2}\,\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\,2 = \frac{7}{4}.$$

2. Calcoliamo

$$P(A|X=3) = P(X=3|A)\,\frac{P(A)}{P(X=3)} = 2^{-3}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\,2^{-3}+\frac{1}{2}\,(2/3)^3} = \frac{1}{1+(4/3)^3} = \frac{27}{91}$$

3. Calcoliamo

$$P(A|X=1) = P(X=1|A)\,\frac{P(A)}{P(X=1)} = \frac{3}{8}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}\times 2^{-3}+\frac{3}{2}\times(2/3)(1/3)^2} = \frac{1}{1+(4/3)(2/3)^2} = \frac{27}{43}$$

Nome:____

5. **(7 punti)** Abbiamo due mazzi di carte francesi ben mischiati. A ogni passo estraiamo due carte, una da ciascun mazzo (senza rimpiazzo). Calcolare:

   (a) la probabilità di avere due carte nere dopo un passo;

   (b) la probabilità di avere in totale una carta nera e tre carte rosse dopo due passi;

   (c) la probabilità che la prima volta in cui si vede una carta rossa sia al terzo passo.

Soluzione: Al primo passo si hanno due nere con probabilità $1/2 \times 1/2 = 1/4$.
Una nera e tre rosse dopo due passi si possono ottenere in diversi modi. Rappresentiamo con $(C_1, C_2, \dots)$ le carte del primo mazzo e con $(C'_1, C'_2, \dots)$ le carte del secondo mazzo. Diciamo $C_i = R$ se la i-esima carta è rossa e $C_i = N$ se nera. Dopo due passi abbiamo $[(C_1, C_2), (C'_1, C'_2)]$. Per un totale di 1 nera e 3 rosse ci sono i seguenti casi:

$$[(N, R), (R, R)], [(R, N), (R, R)], [(R, R), (N, R)], [(R, R), (R, N)].$$

Ciascun esito ha probabilità $(26/52 \times 26/51) \times (26/52 \times 25/51) = 325/5202$. Dunque, la probabilità richiesta è $4 \times 325/5202 = 650/2601 \approx 0.25$.
Per vedere la prima carta rossa al k-esimo passo si devono avere sempre nere per $k-1$ passi e poi avere una rossa e una nera oppure due rosse al k-esimo, dunque per $k = 3$:

(1) $[(N, N, R), (N, N, R)]$

(2) $[(N, N, N), (N, N, R)]$, $[(N, N, R), (N, N, N)]$

L'esito nel caso 1) ha probabilità $(26/52 \times 25/51 \times 26/50)^2 = 13/102$. Ciascun esito nel caso 2) ha probabilità $(26/52 \times 25/51 \times 24/50)(26/52 \times 25/51 \times 26/50) = 13/867$ e dunque la risposta è

$$2 \times \frac{13}{867} + \frac{3}{102} = \frac{103}{1734} \approx 0.06.$$

Nome:____