Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2023-24, II semestre
15 aprile, 2024

CP210 Introduzione alla Probabilità: Esonero 1

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nota:

1. L'unica cosa che si può usare durante l'esame è una penna o una matita. Tutto il resto (calcolatrice, libri, appunti, altri fogli di carta, ...) deve essere messo da parte.
2. Risposte implicite sotto forma di coefficienti binomiali, potenze, esponenziali ecc. sono benvenute. Mostrate in dettaglio il vostro lavoro.
3. Non parlate durante l'esame. Copiare o far copiare non è tollerabile.
4. Scrivete il vostro nome su ogni pagina. In caso di utilizzo di piu' pagine per un singolo esercizio indicare chiaramente l'ordine.
5. Il punteggio massimo per ogni esercizio è indicato nel testo. Notare che già con quattro esercizi risolti correttamente si arriva vicino al trenta.

Buon lavoro!

esercizio	1	2	3	4	5	totale
punti						
su	7	7	7	7	7	35

Nome:____

1. **(7 punti)** Siano $n > k > 0$ interi fissati. Abbiamo due urne, ciascuna con n palline: la prima contiene n palline bianche, la seconda contiene k palline nere e $n - k$ bianche. Scegliamo un'urna a caso e estraiamo una pallina. Calcolare, in funzione di k, n:

   (a) La probabilità che la pallina sia nera.

   (b) La probabilità di aver scelto la prima urna sapendo che la pallina estratta è bianca.

   (c) Il valore atteso del numero di palline nere nella seconda urna dopo l'estrazione.

Soluzione: a. Sia A l'evento di aver scelto la prima urna e $B = A^c$ l'evento di aver scelto la seconda urna. Se E è l'evento di estrarre una pallina nera, allora $P(E|A) = 0$ e $P(E|B) = k/n$. Dunque, usando $P(A) = P(B) = 1/2$, si ha

$$P(E) = (1/2)P(E|A) + (1/2)P(E|B) = \frac{k}{2n}.$$

b. Vogliamo $P(A|E^c)$, dunque, essendo $P(E^c|A) = 1$ si ha

$$P(A|E^c) = P(E^c|A)P(A)/P(E^c) = \frac{P(A)}{1 - P(E)} = \frac{1/2}{1 - \frac{k}{2n}} = \frac{n}{2n - k}.$$

c. Sia X il numero di palline nere nella seconda urna dopo l'estrazione. Notiamo che $X = k - 1$ se la pallina estratta è nera, mentre $X = k$ se la pallina estratta è bianca. Allora

$$P(X = k - 1) = P(E) = \frac{k}{2n}, \qquad P(X = k) = P(E^c) = 1 - \frac{k}{2n}.$$

Allora

$$E[X] = (k - 1)P(X = k - 1) + kP(X = k) = \frac{k(k - 1)}{2n} + \frac{k(2n - k)}{2n} = \frac{k(2n - 1)}{2n}.$$

Nome:______________________________________

2. **(7 punti)** Supponiamo di lanciare ripetutamente due dadi equi. Il gioco viene interrotto quando si ottengono per la prima volta due facce uguali oppure una somma pari 7. Calcolare:

   (a) La probabilità che il gioco termini dopo un lancio.

   (b) Il valore atteso del numero di lanci effettuati.

   (c) La probabilità che il gioco termini con due facce uguali.

Soluzione:

a. Sia A_k l'evento di avere due facce uguali al $k-$esimo lancio e B_k l'evento di avere somma 7 al $k-$esimo lancio. Abbiamo $P(A_k) = P(B_k) = 1/6$. Inoltre il gioco termina al primo lancio se e solo se si realizza l'evento $A_1 \cup B_1$. Dunque la probabilità richiesta vale

$$P(A_1 \cup B_1) = P(A_1) + P(B_1) = \frac{1}{3}.$$

b. Sia X il numero di lanci effettuati. Notiamo che

$$\{X = k\} = (A_k \cup B_k) \cap \left(\cap_{j=1}^{k-1} (A_j \cup B_j)^c \right).$$

Allora per l'indipendenza si ha

$$P(X = k) = P(A_k \cup B_k) \times \prod_{j=1} (1 - P(A_j \cup B_j)) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Dunque X è una geometrica di parametro $1/3$. La sua media è pertanto $E[X] = 3$.

c. Consideriamo l'evento E_k che il gioco termini al k-esimo lancio con due facce uguali. Ossia $E_k = \{X = k\} \cap A_k$. Allora $E_k = A_k \cap \left(\cap_{j=1}^{k-1} (A_j \cup B_j)^c \right)$. Sia E l'evento di terminare con due facce uguali. Allora $E = \cup_{k=1}^{\infty} E_k$, e dunque

$$P(E) = \sum_{k=1}^{\infty} P(E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \times \prod_{j=1}^{k-1} (1 - P(A_j \cup B_j)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{6} \left(\frac{2}{3} \right)^{k-1} = \frac{1}{2}.$$

Nome:____

3. **(7 punti)** Il flusso di autoveicoli a un casello autostradale è descritto da un processo di Poisson con una media di 12 veicoli al minuto. Calcolare:

   (a) La probabilità che non passino veicoli nei prossimi 10 secondi;

   (b) La probabilità che passino 2 veicoli nei prossimi 20 secondi;

   (c) La probabilità condizionata che passino 2 veicoli nei prossimi 20 secondi sapendo che non passano veicoli nei prossimi 10 secondi.

Soluzione: a. In 10 secondi il numero medio di veicoli è 2, dunque la probabilità richiesta è la probabilità che una Poisson di parametro 2 valga 0, ossia e^{-2}.

b. In 20 secondi il numero medio di veicoli è 4, dunque la probabilità richiesta è la probabilità che una Poisson di parametro 4 valga 2, ossia $4^2 e^{-4}/2 = 8e^{-4}$.

c. Per l'indipendenza questa equivale alla probabilità di avere 2 veicoli nei secondi 10 secondi ossia $2^2 e^{-4}/2 = 2e^{-2}$. Piú precisamente, sia E l'evento di avere 2 veicoli nei prossimi 20 secondi, e siano A l'evento di avere 0 veicoli nei prossimi 10 secondi, e B l'evento di avere 2 veicoli nei successivi 10 secondi. Allora la probabilità richiesta si scrive come

$$P(E|A) = \frac{P(E \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B) = 2e^{-2}.$$

Nome:____

4. **(7 punti)** Un'urna contiene 10 palline, di cui 4 sono rosse e 6 sono blu. Estraiamo 3 palline dall'urna senza reinserimento. Calcolare:

   (a) la probabilità di ottenere due palline rosse e una blu;

   (b) la probabilità condizionata di ottenere due palline rosse e una blu dato che la prima pallina estratta è rossa.

   (c) la probabilità di ottenere almeno una pallina rossa e almeno una pallina blu dato che la prima pallina estratta è rossa.

Soluzione: Le estrazioni possibili sono $\binom{10}{3}$. Di queste $\binom{4}{2}\binom{6}{1}$ hanno 2 palline rosse e una blu. Dunque

$$P(2 \text{ palline rosse e una blu}) = \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{3}{10}.$$

Se sappiamo che la prima estratta è rossa allora possiamo pensare a un'estrazione di due palline tra 9 palline, di cui 3 rosse e 6 blu, e chiederci qual è la probabilità di estrarre una pallina rossa. Dunque

$$P(2 \text{ palline rosse e una blu} \,|\, \text{la prima estratta è rossa}) = \frac{\binom{3}{1}\binom{6}{1}}{\binom{9}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Se la prima è rossa, per avere almeno una rossa e una blu ci sono due casi per le successive 2 estrazioni: due blu oppure una blu e una rossa. Allora

$$P(\text{almeno una rosse e una blu} \,|\, \text{la prima estratta è rossa}) = \frac{\binom{3}{0}\binom{6}{2} + \binom{3}{1}\binom{6}{1}}{\binom{9}{2}} = \frac{11}{12}.$$

Nome:______________________________________

5. **(7 punti)** Lanciamo due volte una moneta truccata, con probabilità $1/3$ di uscire "testa" e probabilità $2/3$ di uscire "croce". L'esperimento è considerato un successo di tipo 1 se il risultato è prima testa e poi croce, un successo di tipo 2 se il risultato è prima croce e poi testa, mentre è considerato un insuccesso in tutti gli altri casi. Ripetiamo l'esperimento 18 volte. Sia X il numero di successi di tipo 1 e sia Y il numero di successi di tipo 2

   (a) Il valore atteso e la varianza di X;

   (b) Il valore atteso e la varianza di Y;

   (c) Il valore atteso e la varianza di $X+Y$.

Soluzione: L'esperimento è un successo di tipo 1 con probabilità $p = (1/3) \times (2/3) = 2/9$. Allo stesso modo, si ha un successo di tipo 2 con probabilità $p = (2/3) \times (1/3) = 2/9$. Dunque X e Y sono entrambe Binomiali di parametri 18 e $2/9$, con densità di probabilità è

$$p_X(k) = p_Y(k) = \binom{18}{k} (2/9)^k (7/9)^{18-k}, \qquad k = 0, \dots, 18.$$

Allora il valore atteso vale $E[X] = E[Y] = 18 \times p = 4$, e la varianza vale $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = 18 \times p(1-p) = 28/9$. La variabile $X+Y$ è il numero totale di successi, in cui contiamo sia i successi di tipo 1 sia quelli di tipo 2. Poiché un successo ha probabilità $2 \times p = 4/9$, abbiamo che $X+Y$ è una binomiale di parametri 18 e $4/9$. Allora $E[X+Y] = 18 \times 4/9 = 8$, e la varianza vale $\mathrm{Var}(X+Y) = 18 \times (4/9)(1-4/9) = 40/9$.

Nome:____