

CP210 Introduzione alla Probabilità: Esonero 1

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nota:

1. L'unica cosa che si può usare durante l'esame è una penna o una matita. Tutto il resto (calcolatrice, libri, appunti, altri fogli di carta, ...) deve essere messo da parte.
2. Risposte implicite sotto forma di coefficienti binomiali, potenze, esponenziali ecc. sono benvenute. Mostrate in dettaglio il vostro lavoro.
3. Non parlate durante l'esame. Copiare o far copiare non è tollerabile.
4. Scrivete il vostro nome su ogni pagina. In caso di utilizzo di più pagine per un singolo esercizio indicare chiaramente l'ordine.
5. Il punteggio massimo per ogni esercizio è indicato nel testo. Notare che già con quattro esercizi risolti correttamente si arriva vicino al trenta.

Buon lavoro!

esercizio	1	2	3	4	5	totale
punti						
su	7	7	7	7	7	35

Nome: _____

1. **(7 punti)** In un'urna ci sono 5 palline rosse, 3 verdi e 2 blu. Si estraggono due palline una dopo l'altra, senza reinserimento.

- (a) Qual è la probabilità che la seconda pallina sia verde, sapendo che la prima è rossa?
- (b) Qual è la probabilità che le palline estratte siano dello stesso colore?
- (c) Sapendo che le due palline estratte sono di colore diverso, qual è la probabilità che una di esse sia blu?

Soluzione: Il numero totale di palline è $5 + 3 + 2 = 10$.

a) Dopo aver estratto una pallina rossa, restano 9 palline di cui 3 verdi:

$$P(\text{verde al } 2^{\circ} \mid \text{rossa al } 1^{\circ}) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

b) Per avere la probabilità che le palline siano dello stesso colore, abbiamo:

- Due rosse: $\frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{20}{90}$
- Due verdi: $\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{90}$
- Due blu: $\frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{90}$

Dunque:

$$P(\text{stesso colore}) = \frac{20 + 6 + 2}{90} = \frac{28}{90} = \frac{14}{45}.$$

c) Per la probabilità che una pallina sia blu, dato che le due sono di colore diverso, osserviamo che

$$P(\text{colori diversi}) = 1 - P(\text{stesso colore}) = 1 - \frac{14}{45} = \frac{31}{45}.$$

Calcoliamo la probabilità che le due siano di colore diverso e che una sia blu:

- Rossa e blu: $\frac{5}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{10+10}{90} = \frac{20}{90}$
- Verde e blu: $\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{6+6}{90} = \frac{12}{90}$

Allora

$$P(\text{diversi e una blu}) = \frac{32}{90}$$

In conclusione,

$$P(\text{una blu} \mid \text{colori diversi}) = \frac{P(\text{diversi e una blu})}{P(\text{colori diversi})} = \frac{\frac{32}{90}}{\frac{31}{45}} = \frac{32}{90} \cdot \frac{45}{31} = \frac{16}{31}.$$

Nome: _____

2. **(7 punti)** Supponiamo di lanciare ripetutamente due dadi equi. Il gioco viene interrotto quando per la prima volta la somma delle due facce è pari. Calcolare:

- (a) Il numero medio di lanci effettuati;
- (b) la probabilità che il gioco termini con due facce uguali;
- (c) la probabilità condizionata di non ottenere mai un 6 sapendo che il gioco termina al terzo lancio con la coppia (4, 4).

Soluzione:

- a) Sia A_k l'evento di avere somma pari al k -esimo lancio e sia X il numero di lanci effettuati. Allora

$$P(X = k) = P(A_1^c \cap \dots \cap A_{k-1}^c \cap A_k) = (1 - p)^{k-1} p,$$

dove $p = P(A_k)$. Per calcolare p osserviamo che in un lancio di due dadi si hanno 18 possibili esiti (i, j) , con $i, j = 1, \dots, 6$, tali che $i + j$ è pari. E dunque $p = 18/36 = 1/2$. Allora X è una geometrica di parametro $1/2$. La sua media è pertanto $E[X] = 1/p = 2$.

- b) Sia E l'evento che il gioco termina con due facce uguali. Allora $E = \cup_{k=1}^{\infty} (A_1^c \cap \dots \cap A_{k-1}^c \cap U_k)$ dove U_k è l'evento di avere due facce uguali al k -esimo lancio. Notiamo che $P(U_k) = 6/36 = 1/6$. Allora

$$P(E) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_1^c \cap \dots \cap A_{k-1}^c \cap U_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - p)^{k-1} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

- c) Sia C l'evento di avere (4, 4) nel terzo lancio. Allora l'evento che il gioco termina al terzo lancio con la coppia (4, 4) si scrive $B = A_1^c \cap A_2^c \cap C$. Sia F_k l'evento di avere somma dispari senza 6 nel lancio k -esimo. Allora se D è l'evento "nessun 6", si ha $D \cap B = F_1 \cap F_2 \cap C$. Dunque

$$P(D|B) = \frac{P(F_1 \cap F_2 \cap C)}{P(A_1^c \cap A_2^c \cap C)} = \frac{P(F_1)P(F_2)P(C)}{P(A_1^c)P(A_2^c)P(C)} = \frac{P(F_1)}{P(A_1^c)} \cdot \frac{P(F_2)}{P(A_2^c)} = 4 \frac{(12)^2}{(36)^2} = \frac{4}{9},$$

dove usiamo il fatto che con due dadi ci sono 12 modi di ottenere somma dispari senza 6 e dunque $P(F_1) = P(F_2) = 12/36$.

Nome: _____

3. **(7 punti)** Un giocatore può scegliere tra i seguenti due giochi, entrambi basati sull'estrazione di due carte, senza reinserimento, da un mazzo standard da 52 carte francesi. Nel gioco A: se entrambe le carte sono rosse vince 3 euro; se entrambe sono nere perde 1 euro; se una è rossa e una nera vince 1 euro. Nel gioco B: se le due carte hanno lo stesso valore (es. due 8, o due Q) vince 16 euro; in tutti gli altri casi perde 1 euro.

- (a) Da un confronto dei valori attesi, stabilire a quale gioco conviene giocare.
(b) In quale gioco la vincita ha una varianza maggiore ?

Soluzione: Gioco A: Il mazzo ha 26 rosse e 26 nere. Le probabilità sono

- Due rosse: $\frac{26}{52} \cdot \frac{25}{51} = \frac{650}{2652} = \frac{25}{102}$
- Due nere: stesso calcolo, quindi $\frac{25}{102}$
- Una rossa e una nera: $1 - 2 \cdot \frac{25}{102} = \frac{52}{102}$.

Dunque la vincita è una variabile aleatoria X che vale $\{3, -1, 1\}$ con probabilità $\frac{25}{102}, \frac{25}{102}, \frac{52}{102}$ rispettivamente. Il suo valore atteso è:

$$E[X] = 3 \times \frac{25}{102} - \frac{25}{102} + \frac{52}{102} = 1.$$

La sua varianza è

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = 9 \times \frac{25}{102} + \frac{25}{102} + \frac{52}{102} - 1 = \frac{100}{51}.$$

Gioco B: la probabilità di ottenere una coppia estraendo due carte è

$$\frac{13 \times \binom{4}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{3}{51}.$$

Dunque la vincita è una variabile aleatoria Y che vale $\{16, -1\}$ con probabilità $\frac{3}{51}, \frac{48}{51}$ rispettivamente. Il suo valore atteso è:

$$E[Y] = 16 \times \frac{3}{51} - \frac{48}{51} = 0.$$

In particolare, $E[X] > E[Y]$. La varianza di Y è

$$\text{Var}(Y) = E[Y^2] = 16^2 \times \frac{3}{51} + \frac{48}{51} = \frac{816}{51} = 16.$$

Ne segue che $\text{Var}(Y) > \text{Var}(X)$.

In conclusione, il gioco A ha valore atteso maggiore e varianza minore del gioco B. Dal punto di vista dei valori attesi conviene giocare al gioco A, ma si possono ottenere vincite molto maggiori nel gioco B.

Nome: _____

4. **(7 punti)** Lanciamo 10 dadi. Sia X il numero di facce superiori a 4 e sia Y il numero di facce superiori a 2. Calcolare:

- (a) Il valore atteso di X e il valore atteso di Y ;
- (b) la varianza di X e la varianza di Y ;
- (c) la densità di probabilità della variabile aleatoria $Y - X$.

Soluzione: La probabilità di una faccia superiore a 2 è $2/3$, mentre la probabilità di una faccia superiore a 4 è $1/3$. Dunque $X = \text{Bin}(10, 1/3)$ e $Y = \text{Bin}(10, 2/3)$. Allora

$$E[X] = 10/3, \quad E[Y] = 20/3.$$

Inoltre,

$$\text{Var}[X] = 20/9, \quad \text{Var}[Y] = 20/9.$$

La v.a. $Y - X$ conta il numero di facce superiori a 2 ma inferiori o uguali a 4, e dunque $Y - X = \text{Bin}(10, 1/3)$. Allora la sua densità di probabilità è data da

$$p(k) = P(Y - X = k) = \binom{10}{k} (1/3)^k (2/3)^{10-k} = (2/3)^{10} \binom{10}{k} 2^{-k}, \quad k = 0, \dots, 10.$$

Nome: _____

5. **(7 punti)** Un robot industriale programmato per eseguire in media 6 operazioni al minuto su una linea di montaggio. Le operazioni avvengono in modo indipendente e casuale nel tempo, e il numero di operazioni in un intervallo di tempo pu essere modellato come un processo di Poisson. Calcolare:
- (a) la probabilit che non esegua alcuna operazione nei prossimi 10 secondi;
 - (b) la probabilit condizionata che esegua 2 operazioni nei prossimi 20 secondi, sapendo che non esegue operazioni nei primi 10 secondi;
 - (c) sapendo che esegue esattamente 2 operazioni nei prossimi 30 secondi, qual è la probabilit che entrambe avvengano nei primi 10 secondi ?

Soluzione:

- a) In 10 secondi il numero medio di veicoli è 1, dunque la probabilità richiesta è la probabilità che una Poisson di parametro 1 valga 0, ossia e^{-1} .
- b) Per l'indipendenza questa equivale alla probabilità di avere 2 operazioni nei secondi 10 secondi ossia $1^2 e^{-1}/2 = 1/(2e)$. Più precisamente, sia E l'evento di avere 2 operazioni nei prossimi 20 secondi, e siano A l'evento di avere 0 operazioni nei prossimi 10 secondi, e B l'evento di avere 2 operazioni nei successivi 10 secondi. Allora la probabilità richiesta si scrive come

$$P(E|A) = \frac{P(E \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B) = \frac{1}{2e}.$$

- c) Sia F l'evento di avere 2 operazioni nei prossimi 30 secondi, e siano G l'evento di avere 2 operazioni nei prossimi 10 secondi, e H l'evento di avere 0 operazioni nei successivi 20 secondi. Allora la probabilità richiesta è

$$P(G|F) = \frac{P(G \cap F)}{P(F)} = \frac{P(G \cap H)}{P(F)} = \frac{P(G)P(H)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{2}e^{-1}e^{-2}}{\frac{3^2}{2}e^{-3}} = \frac{1}{9}.$$

Nome: _____