

CP210 Introduzione alla Probabilità: Esonero 1

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nota:

1. L'unica cosa che si può usare durante l'esame è una penna o una matita. Tutto il resto (calcolatrice, libri, appunti, altri fogli di carta, ...) deve essere messo da parte.
2. Risposte implicite sotto forma di coefficienti binomiali, potenze, esponenziali ecc. sono benvenute. Mostrate in dettaglio il vostro lavoro.
3. Non parlate durante l'esame. Copiare o far copiare non è tollerabile.
4. Scrivete il vostro nome su ogni pagina. In caso di utilizzo di più pagine per un singolo esercizio indicare chiaramente l'ordine.
5. Il punteggio massimo per ogni esercizio è indicato nel testo. Notare che già con quattro esercizi risolti correttamente si arriva vicino al trenta.

Buon lavoro!

esercizio	1	2	3	4	5	totale
punti						
su	7	7	7	7	7	35

Nome: _____

1. (7 punti) Si lancia una moneta equa fino a ottenere due risultati consecutivi uguali.
- (a) Probabilità che il numero di lanci sia esattamente 2.
 - (b) Probabilità che sia esattamente 3.
 - (c) Calcolare la probabilità che il gioco termini entro 4 lanci.

Soluzione:

Sia N il numero di lanci effettuati.

- (a) Per terminare in 2 lanci occorre che i primi due risultati coincidano: TT oppure CC. Dunque

$$P(N = 2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

- (b) Per terminare in 3 lanci i primi due risultati devono essere diversi e il terzo uguale al secondo. Le sequenze possibili sono TCC e CTT. Quindi

$$P(N = 3) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

- (c) Il gioco non termina entro 4 lanci se i primi 4 risultati alternano sempre, cioè TCTC oppure CTCT. Pertanto

$$P(N > 4) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}, \quad P(N \leq 4) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

Nome: _____

2. (7 punti) Abbiamo due urne:

- Urna A: 4 palline rosse e 6 blu
- Urna B: 7 rosse e 3 blu

Scegliamo un'urna a caso e estraiamo una pallina.

- Probabilità che la pallina sia rossa.
- Sapendo che è rossa, probabilità che provenga dall'urna B.
- Se estraiamo due volte con reinserimento dalla stessa urna, probabilità di ottenere due rosse.

Soluzione:

Indichiamo con A l'evento "si sceglie l'urna A", con B l'evento "si sceglie l'urna B" e con R l'evento "pallina rossa".

- Per la formula delle probabilità totali,

$$P(R) = P(R | A)P(A) + P(R | B)P(B) = \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{20}.$$

- Per Bayes,

$$P(B | R) = \frac{P(R | B)P(B)}{P(R)} = \frac{\frac{7}{10} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{11}{20}} = \frac{7}{11}.$$

- La probabilità di due rosse dipende dall'urna scelta:

$$P(2R) = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{10} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{7}{10} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{16}{100} + \frac{49}{100} \right) = \frac{13}{40}.$$

Nome: _____

3. **(7 punti)** In una stazione arrivano clienti secondo un processo di Poisson con una media di 2 clienti al minuto.

- (a) Probabilità che in un minuto arrivino esattamente 3 clienti.
- (b) Probabilità che in due minuti arrivi almeno 1 cliente.
- (c) Sapendo che in un minuto sono arrivati 2 clienti, qual è la probabilità che almeno uno sia arrivato nei primi 30 secondi?

Soluzione:

Sia N_t il numero di arrivi nell'intervallo di tempo di lunghezza t minuti.

- (a) Poiché $N_1 \sim \text{Poisson}(2)$,

$$P(N_1 = 3) = e^{-2} \frac{2^3}{3!} = \frac{4}{3} e^{-2}.$$

- (b) In due minuti $N_2 \sim \text{Poisson}(4)$. Quindi

$$P(N_2 \geq 1) = 1 - P(N_2 = 0) = 1 - e^{-4}.$$

- (c) Sia A l'evento $\{N_1 = 2\}$, e B l'evento di zero arrivi nei primi trenta secondi. Allora la probabilità richiesta è

$$1 - P(B | A) = 1 - \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = 1 - \frac{P(B \cap C)}{P(A)},$$

dove C è l'evento di 2 arrivi nei secondi trenta secondi. Per l'indipendenza si ha

$$P(B \cap C) = P(B)P(C) = P(N_{1/2} = 0)P(N_{1/2} = 2) = e^{-1} \times \frac{1}{2} e^{-1} = \frac{1}{2} e^{-2}.$$

In conclusione la probabilità richiesta è

$$= 1 - \frac{\frac{1}{2} e^{-2}}{\frac{1}{2} 2^2 e^{-2}} = \frac{3}{4}.$$

Nome: _____

4. **(7 punti)** Una scatola contiene 5 palline numerate: due palline con numero 0, due palline con numero 1, e una pallina con numero 3. Si estrae una pallina a caso e si definisce X come il numero scritto sulla pallina estratta.

- (a) Determinare la densità di probabilità della variabile aleatoria X .
- (b) Calcolare $\mathbb{E}[X]$ e $\text{Var}(X)$.
- (c) Sapendo che l'estrazione ha dato un numero dispari, calcolare la probabilità che sia uscito 3.

Soluzione:

La variabile X assume i valori 0, 1, 3.

- (a) La densità di probabilità è

$$P(X = 0) = \frac{2}{5}, \quad P(X = 1) = \frac{2}{5}, \quad P(X = 3) = \frac{1}{5}.$$

- (b) Il valore atteso è

$$\mathbb{E}[X] = 0 \cdot \frac{2}{5} + 1 \cdot \frac{2}{5} + 3 \cdot \frac{1}{5} = 1.$$

Inoltre

$$\mathbb{E}[X^2] = 0^2 \cdot \frac{2}{5} + 1^2 \cdot \frac{2}{5} + 3^2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5} + \frac{9}{5} = \frac{11}{5}.$$

Dunque

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{11}{5} - 1 = \frac{6}{5}.$$

- (c) L'evento "numero dispari" è $\{X = 1\} \cup \{X = 3\}$. Allora

$$P(X = 3 \mid X \text{ dispari}) = \frac{P(X = 3)}{P(X = 1) + P(X = 3)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5} + \frac{1}{5}} = \frac{1}{3}.$$

Nome: _____

5. (7 punti) Un giocatore può scegliere tra due strategie.

Strategia A. Si lanciano due dadi equilibrati. Il giocatore vince 8 euro se la somma è almeno 10, e 2 euro altrimenti.

Strategia B. Si lancia una moneta equilibrata 4 volte. Il giocatore vince 10 euro se escono almeno 3 teste, e 1 euro altrimenti.

- (a) Calcolare la vincita attesa della strategia A.
- (b) Calcolare la vincita attesa della strategia B.
- (c) Quale strategia scegliereste?

Soluzione:

a) Nella strategia A la somma di due dadi è almeno 10 nei casi

$$(4, 6), (5, 5), (6, 4), (5, 6), (6, 5), (6, 6),$$

cioè in 6 casi su 36. Pertanto

$$P(\text{somma} \geq 10) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

La vincita attesa vale quindi

$$\mathbb{E}[A] = 8 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{18}{6} = 3.$$

b) Nella strategia B si vince 10 euro se escono almeno 3 teste. Il numero di teste è una binomiale di parametri 4 e $1/2$ e dunque la probabilità è

$$P(\text{almeno 3 teste}) = \binom{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \binom{4}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4+1}{16} = \frac{5}{16}.$$

Quindi

$$\mathbb{E}[B] = 10 \cdot \frac{5}{16} + 1 \cdot \frac{11}{16} = \frac{61}{16}.$$

c) Poiché

$$\frac{61}{16} = 3.8125 > 3,$$

da un confronto dei valori attesi conviene scegliere la strategia B. Tuttavia la scelta della strategia può tenere conto anche di altri fattori, come la propensione al rischio. Da un calcolo della varianza della vincita si trova che nel caso A questa vale 5 mentre nel caso B vale $511/16$ che è molto maggiore di 5. Dunque B è molto più rischioso di A e ci si può aspettare che molti preferiscano l'opzione A per questo motivo.