Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2009-2010, II semestre
25 maggio, 2010

CP110 Probabilità: Esonero 2

Testo e soluzione

1. **(7 pt)** Siano T_1, T_2 variabili esponenziali indipendenti, di parametri $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$ rispettivamente. Trovare

   1) la probabilità che $T_1 < T_2$

   2) la varianza di $T_1 + T_2 - T_1 T_2$

Soluzione.

$$P(T_1 < T_2) = \int_0^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} \int_t^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 s} ds\, dt = \int_0^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} dt = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Con $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$ si ha 1/3.

Per la varianza possiamo scrivere $\mathrm{Var}(T_1 + T_2 - T_1T_2) = \mathrm{Var}(T_1) + \mathrm{Var}(T_2) + \mathrm{Var}(T_1T_2) + 2\mathrm{Cov}(T_1, T_2) - 2\mathrm{Cov}(T_1, T_1T_2) - 2\mathrm{Cov}(T_2, T_1T_2)$. Sappiamo che $\mathrm{Var}(T_1) = \frac{1}{\lambda_1^2}$ e $\mathrm{Var}(T_2) = \frac{1}{\lambda_2^2}$, e per l'indipendenza $\mathrm{Cov}(T_1, T_2) = 0$. Inoltre

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(T_1, T_1T_2) &= E[T_1^2 T_2] - E[T_1]E[T_1T_2] \\
&= E[T_1^2]E[T_2] - E[T_1]^2 E[T_2] \\
&= \mathrm{Var}(T_1)\, E[T_2] = \frac{1}{\lambda_2 \lambda_1^2}
\end{aligned}$$

Allo stesso modo si ha $\mathrm{Cov}(T_2, T_1T_2) = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2^2}$. Inoltre, usando $E[T_i^2] = \frac{2}{\lambda_i^2}$ si ha $\mathrm{Var}(T_1T_2) = E[T_1^2 T_2^2] - E[T_1]^2 E[T_2]^2 = \frac{3}{\lambda_1^2 \lambda_2^2}$. Mettendo insieme:

$$\mathrm{Var}(T_1 + T_2 - T_1T_2) = \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{3}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} - \frac{2}{\lambda_1 \lambda_2^2} - \frac{2}{\lambda_1^2 \lambda_2}$$

Con $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$ si ha $\mathrm{Var}(T_1 + T_2 - T_1T_2) = 1/2$

2. **(10 pt)** Siano X, Y variabili aleatorie continue con densità di probabilità congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{se } y \geq x \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

1) Dire se X e Y sono indipendenti.
2) Calcolare le densità marginali di X e Y e i loro valori attesi
3) Calcolare il valore atteso di $Y - X$.

Soluzione.
La regione in cui la f è non nulla non è un rettangolo nel piano quindi la f non si può scrivere come un prodotto, pertanto X e Y non sono indipendenti. La densità di X è data da

$$f_X(x) = \int_0^\infty e^{-y} 1_{y \geq x} dy = \int_x^\infty e^{-y} dy = e^{-x}\,, \qquad x \geq 0\,,$$

mentre $f_X(x) = 0$ se $x < 0$. La marginale di Y è

$$f_Y(y) = \int_0^\infty e^{-y} 1_{y \geq x} dx = \int_0^y e^{-y} dx = y e^{-y}\,, \qquad y \geq 0\,,$$

mentre $f_Y(y) = 0$ se $y < 0$. Quindi riconosciamo che X è esponenziale di parametro 1, mentre Y è gamma di parametri $\alpha = 2$ e $\lambda = 1$. In particolare, si ha $E[X] = 1$ e $E[Y] = 2$. Per il valore atteso di $Y - X$ si può scrivere $E[Y - X] = E[Y] - E[X] = 1$.
Alternativamente,

$$\begin{aligned} E[Y - X] &= \int_0^\infty dx \int_0^\infty (y-x) e^{-y} 1_{y \geq x} dy = \int_0^\infty dx \int_x^\infty (y-x) e^{-y} dy \\ &= \int_0^\infty e^{-x} dx \int_x^\infty (y-x) e^{-(y-x)} dy = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1 \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che per ogni $x \geq 0$:

$$\int_x^\infty (y-x) e^{-(y-x)} dy = \int_0^\infty e^{-y} dy = 1\,.$$

Per un altro punto di vista, si può osservare che la f coincide con la densità congiunta di $X = E_1, Y = E_1 + E_2$, dove E_1, E_2 sono v.a. esponenziali di parametro 1 indipendenti. Quindi $Y - X = E_2$ ha media 1.

3. **(10 pt)** Si consideri la catena di Markov $X_0, X_1, X_2, \ldots$, con spazio degli stati $\{1,2,3\}$ e matrice di transizione P_{ij}, $i,j = 1,2,3$, tale che $P_{12} = P_{13} = \frac{1}{4}$, $P_{21} = P_{31} = 1$. Determinare la misura invariante della catena.

   Sapendo che $X_0 = 1$:

   1) Calcolare la distribuzione di X_1 sapendo che $X_0 = 1$

   2) Calcolare il valore atteso di X_n nel limite $n \to \infty$

Soluzione. La matrice P deve soddisfare $\sum_{j=1}^{3} P_{ij} = 1$ e quindi

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si puo' mostrare che la catena è ergodica nel senso che $\exists n$ tale che $P^n(i,j) > 0$ per ogni $i,j = 1,\ldots,3$. La misura invariante π_1, π_2, π_3 deve soddisfare $\pi_i > 0$, $\sum_i \pi_i = 1$, e

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{3} \pi_i P_{ij} \,.$$

Ne segue che $\pi_2 = \pi_3 = \frac{1}{4}\pi_1$ e quindi $\pi = (\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$.
Se $X_0 = 1$ allora $X_2 = 1$ con prob. 1/2, $X_2 = 2$ con prob. 1/4, e $X_2 = 3$ con prob. 1/4. La distribuzione della variabile X_n è approssimativamente π per il teorema ergodico. Pertanto $E[X_n] \to E[X]$ dove $X \in \{1,2,3\}$ con distribuzione π. Si ha $E[X] = \frac{2}{3} + 2\frac{1}{6} + 3\frac{1}{6} = \frac{3}{2}$.

4. **(8 pt)** Abbiamo 4 vasi numerati da 1 a 4, e in ognuno poniamo un seme. Se ogni seme dà luogo a una pianta indipendentemente dagli altri con probabilità $\frac{3}{4}$, chiamiamo X il numero totale di piante nei vasi $1, 2, 3$ e Y il numero totale di piante nei vasi $2, 3, 4$. Calcolare

   1) la varianza di $Y - X$.

   2) la covarianza $\mathrm{Cov}(X, Y)$

Soluzione. Sia X_i il il numero di piante nel vaso i. Quindi X_i sono Bernoulli(3/4) indipendenti. Allora $X = Y + X_1 - X_4$. Quindi $\mathrm{Var}(Y - X) = \mathrm{Var}(X_1 - X_4) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_4) = 2p(1-p) = \frac{3}{8}$. Inoltre $\mathrm{Cov}(X, Y) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=2}^{4} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$. Se $i \neq j$ si ha $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$, quindi

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \sum_{i=2}^{3} \mathrm{Cov}(X_i, X_i) = 2\mathrm{Var}(X_1) = 2p(1-p) = \frac{3}{8}\,.$$

5. **(7 pt)** Un dado è lanciato 100 volte. Sia X_i il valore del dado all'i-esimo lancio. Sia $Y_i = 0$ se X_i è dispari e $Y_i = \frac{1}{2}X_i$ se X_i è pari. Sia $S = \sum_{i=1}^{100} Y_i$.

   1) Calcolare il valore atteso e la varianza di S.

   2) Trovare un valore approssimato per la probabilità dell'evento $S \geqslant 100$.

Soluzione. Y_i prende i valori $0, 1, 2, 3$ con probabilità $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$ rispettivamente. Pertanto la media di Y_i è 1. Quindi la media di S è 100. La varianza di Y_i è $E[Y_i^2] - 1$, con $E[Y_i^2] = 1/6 + 4/6 + 9/6 = 7/3$, quindi $\mathrm{Var}(Y_i) = 4/3$. Allora per l'indipendenza delle Y_i si ha $\mathrm{Var}(S) = 400/3$. Per approssimare $P(S \geqslant 100)$ si può supporre che S sia normale e quindi standardizzando la S, supporre che $Z = \frac{S-E[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S)}} = \frac{S-100}{20/\sqrt{3}}$ sia normale standard. Si ha

$$P(S \geqslant 100) = P(Z \geqslant 0) \approx \frac{1}{2}.$$