Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2012-13, II semestre
23 maggio, 2013

CP110 Probabilità: Esonero 2

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nota:

1. L'unica cosa che si puo' usare durante l'esame è una penna o una matita. Tutto il resto (calcolatrice, libri, appunti, altri fogli di carta, ...) deve essere messo da parte.
2. Risposte implicite sotto forma di coefficienti binomiali, potenze, esponenziali ecc. sono benvenute. Mostrate in dettaglio il vostro lavoro.
3. Non parlate durante l'esame. Copiare o far copiare non è tollerabile.
4. Scrivete il vostro nome su ogni pagina. In caso di utilizzo di piu' pagine per un singolo esercizio indicare chiaramente l'ordine.
5. Il punteggio massimo per ogni esercizio è indicato nel testo. Notare che già con quattro esercizi risolti correttamente si arriva vicino al trenta.

Buon lavoro!

esercizio	1	2	3	4	5	totale
punti						
su	7	7	7	7	7	35

Nome:______________________________________

1. **(7 punti)** Lanciamo una moneta equa 4 volte. Sia X il numero totale di teste, e sia Y la differenza tra il numero di teste nei lanci $1, 2$ e il numero di teste nei lanci $3, 4$.

   (a) Scrivere la tabella corrispondente alla densità di probabilità congiunta $p_{X,Y}$

   (b) Calcolare le densità marginali p_X e p_Y

   (c) Dire se X e Y sono indiependenti

Soluzione: Notiamo che $X \in \{0, \dots, 4\}$ e $Y \in \{-2, \dots, 2\}$. Siano $X_{1,2}$ e $X_{3,4}$ il numero di teste nei lanci 1,2 e 3,4 rispettivamente. In questo modo si ha $X = X_{1,2} + X_{3,4}$ e $Y = X_{1,2} - X_{3,4}$. Abbiamo per esempio

$$p_{X,Y}(0,0) = P(X_{1,2} = X_{3,4} = 0) = \frac{1}{16},$$

Inoltre

$$p_{X,Y}(2,0) = P(X_{1,2} = 1, X_{3,4} = 1) = \frac{1}{4}.$$

Procedendo cosí si ottiene la tabella

	-2	-1	0	1	2
0	0	0	$\frac{1}{16}$	0	0
1	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	0
2	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{16}$
3	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	0
4	0	0	$\frac{1}{16}$	0	0

Sommando sulle righe e colonne otteniamo le marginali

$$p_X(0) = \frac{1}{16},\ p_X(1) = \frac{1}{4},\ p_X(2) = \frac{3}{8},\ p_X(3) = \frac{1}{4},\ p_X(4) = \frac{1}{16}, \tag{1}$$

$$p_Y(-2) = \frac{1}{16},\ p_Y(-1) = \frac{1}{4},\ p_Y(0) = \frac{3}{8},\ p_Y(1) = \frac{1}{4},\ p_Y(2) = \frac{1}{16}, \tag{2}$$

Notiamo che X e Y non sono indipendenti poiché per esempio

$$P(Y = 0|X = 4) = 1 \neq P(Y = 0) = \frac{3}{8}.$$

Osserviamo che $E[XY] = \sum_{k,j} kjp_{X,Y}(k,j) = 0$ e $E[X] = 2$, $E[Y] = 0$, dunque $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ pur essendo le variabili dipendenti.
Si può inoltre osservare che X ha la stessa distribuzione di $Y + 2$.

Nome:____

2. **(7 punti)** Si consideri la passeggiata aleatoria su $\mathbb{Z}$ con incrementi ± 1 simmetrici. Sia S_n la posizione dopo n passi, con $S_0 = 0$. Utilizzando l'approssimazione normale, calcolare le seguenti probabilità nel limite $n \to \infty$:

   (a) $\mathbb{P}(|S_n| \leqslant \sqrt{n})$

   (b) $\mathbb{P}(|S_n| \leqslant n^{0.1})$

   (c) $\mathbb{P}(|S_n| \leqslant n^{0.9})$

Soluzione: a) Per il teorema del limite centrale sappiamo che $\frac{1}{\sqrt{n}} S_n \sim Z = N(0,1)$, allora per ogni $t > 0$ fissato si ha

$$\mathbb{P}(|S_n| \leqslant t n^{\frac{1}{2}}) \approx \mathbb{P}(|Z| \leqslant t) = 2\Phi(t) - 1. \tag{3}$$

Per $t = 1$ abbiamo $\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(|S_n| \leqslant n^{\frac{1}{2}}) = 2\Phi(1) - 1$.
b) Notiamo che $|S_n| \leqslant n^{0.1}$ equivale a $|S_n| \leqslant t n^{\frac{1}{2}}$ per $t = n^{-0.4}$ allora

$$\mathbb{P}(|S_n| \leqslant n^{0.1}) \approx 2\Phi(n^{-0.4}) - 1 \approx 0, \tag{4}$$

dove abbiamo usato $\Phi(n^{-0.4}) \approx \Phi(0) = \frac{1}{2}$. Questo mostra che $\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(|S_n| \leqslant n^{0.1}) = 0$.
Per una versione piu' precisa dell'argomento precedente procediamo come segue. Se $t > 0$ è fissato, allora per n grande si ha $n^{0.1} \leqslant t n^{\frac{1}{2}}$. Dunque

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(|S_n| \leqslant n^{0.1}) \leqslant \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(|S_n| \leqslant t n^{\frac{1}{2}}) = 2\Phi(t) - 1.$$

Questa stima vale per ogni $t > 0$ e dunque passando al limite $t \downarrow 0$ e usando $\Phi(0) = \frac{1}{2}$ si ha $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(|S_n| \leqslant n^{0.1}) = 0$ che, essendo la probabilità sempre nonnegativa, equivale a

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(|S_n| \leqslant n^{0.1}) = 0.$$

c) Se procediamo come nella (4), questa volta $|S_n| \leqslant n^{0.9}$ equivale a $|S_n| \leqslant t n^{\frac{1}{2}}$ per $t = n^{+0.4}$, e pertanto

$$\mathbb{P}(|S_n| \leqslant n^{0.9}) \approx 2\Phi(n^{0.4}) - 1 \approx 1,$$

dove abbiamo usato $\Phi(n^{0.4}) \approx \Phi(+\infty) = 1$.
Per una derivazione piu' precisa possiamo ragionare come sopra. Per ogni $t > 0$ fissato, per n grande si ha $n^{0.9} \geqslant t n^{\frac{1}{2}}$. Dunque

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(|S_n| \leqslant n^{0.9}) \geqslant \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(|S_n| \leqslant t n^{\frac{1}{2}}) = 2\Phi(t) - 1.$$

Questa stima vale per ogni $t > 0$ e dunque passando al limite $t \uparrow \infty$ si ha $\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(|S_n| \leqslant n^{0.1}) = 1$ che, essendo la probabilità sempre al piú 1, equivale a

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(|S_n| \leqslant n^{0.9}) = 1.$$

Nome:____

3. **(7 punti)** Siano X e Y due variabili esponenziali indipendenti, di parametro λ e μ rispettivamente, dove $\lambda, \mu > 0$ sono costanti assegnate. Calcolare la densità di probabilità delle variabili

   (a) $Z = Y/X$

   (b) $T = \min\{X, Y\}$

   (c) $W = \max\{X, Y\}$

Soluzione: Calcoliamo la funzione di distribuzione $F_Z(t) = P(Y/X \leqslant t) = P(Y \leqslant tX)$:

$$F_Z(t) = \int_0^\infty \int_0^{tx} \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu y} dy dx = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\mu t x}) dx = 1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu t}, \qquad t \geqslant 0.$$

Derivando otteniamo la densità

$$f_Z(z) = \frac{\lambda \mu}{(\lambda + \mu z)^2} \mathbf{1}_{[z \geqslant 0]}$$

Per T abbiamo

$$F_T(t) = 1 - P(T > t) = 1 - P(X > t)P(Y > t) = 1 - e^{-\lambda t} e^{-\mu t}, \qquad t \geqslant 0.$$

Derivando si ha

$$f_T(t) = (\lambda + \mu) e^{-(\lambda + \mu)t} \mathbf{1}_{[t \geqslant 0]}.$$

Per W abbiamo

$$F_W(t) = P(X \leqslant t, Y \leqslant t) = P(X \leqslant t)P(Y \leqslant t) = (1 - e^{-\lambda t})(1 - e^{-\mu t}), \qquad t \geqslant 0$$

Derivando si ha

$$f_W(w) = \left(\lambda e^{-\lambda w}(1 - e^{-\mu w}) + \mu e^{-\mu w}(1 - e^{-\lambda w})\right) \mathbf{1}_{[w \geqslant 0]}.$$

Nome:____

4. **(7 punti)** Quattro tenniste A,B,C,D fanno un gioco. Ogni giorno per 5 giorni si sfidano scegliendo in maniera casuale uniforme fra i tre accoppiamento possibili

$$\{\text{AB}, \text{CD}\}, \{\text{AC}, \text{BD}\}, \{\text{AD}, \text{BC}\}.$$

Se X è il numero di volte che A e B si incontrano, e Y il numero di volte che A e C si incontrano, calcolare:

(a) Il valore atteso di X e Y

(b) La varianza di X e Y

(c) La covarianza tra X e Y

Soluzione: Ogni giorno A e B hanno probabilità 1/3 di insontrarsi, e dunque per linearità si ha

$$E[X] = 5 \times (1/3) = \frac{5}{3}.$$

Lo stesso vale per Y.
Sia X_i la variabile che indica se A e B si incontrano il giorno i. Allora $X = X_1 + \cdots + X_5$. Notiamo che $E[X_i] = 1/3$ e $\text{Var}(X_i) = (1/3) \times (2/3)$ Se assumiamo che le X_i sono indipendenti, allora

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{5} \text{Var}(X_i) = 5 \times \text{Var}(X_1) = 5 \times (1/3) \times (2/3) = \frac{10}{9}$$

Lo stesso vale per Y.
Calcoliamo ora la covarianza. Ragionando come sopra scriviamo $XY = \sum_{i,j=1}^{5} X_i Y_j$. Allora

$$\text{Cov}[X, Y] = \sum_{i,j=1}^{5} \text{Cov}[X_i, Y_j] = \sum_{i=1}^{5} \text{Cov}[X_i, Y_i] = 5\text{Cov}[X_1, Y_1],$$

dove usiamo il fatto che se giorni differenti sono indipendenti allora $\text{Cov}[X_i, Y_j] = 0$ se $i \neq j$. Per calcolare $\text{Cov}[X_1, Y_1]$ osserviamo che $X_1 Y_1 = 0$ e dunque

$$\text{Cov}[X_1, Y_1] = E[X_1 Y_1] - E[X_1]E[Y_1] = -E[X_1]E[Y_1] = -\frac{1}{9}$$

In conclusione, $\text{Cov}[X, Y] = -\frac{5}{9}$.

Nome:______________________________________

5. **(7 punti)** Siano X, Y variabili aleatorie continue con densità di probabilità congiunta $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} c(x+2y) & \text{se } (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{5}$$

dove c è una costante.

(a) Calcolare il valore di c

(b) Calcolare $\mathbb{P}(X > \frac{1}{2})$

(c) Dire se X e Y sono indipendenti.

Soluzione: Calcoliamo

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = c\int_0^1 \left(\int_0^1 (x+2y)dy\right) dx = c\int_0^1 (x+1)\,dx = c\,\frac{3}{2}$$

Allora per $c = \frac{2}{3}$ si ha $f \geqslant 0$ e

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = 1.$$

La marginale su X ha densità

$$f_X(x) = c\int_0^1 (x+2y)dy = \frac{2}{3}(x+1)\,\mathbf{1}_{[0,1]}(x)\,.$$

Allora

$$\mathbb{P}(X > \tfrac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{2}{3}(x+1)dx = \frac{3}{12} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}.$$

Infine, per testare l'indipendenza possiamo calcolare le marginali. Per $x \in [0,1]$ e $y \in [0,1]$ si ha:

$$f_X(x) = \frac{2}{3}\int_0^1 (x+2y)dy = \frac{2}{3}(x+1)\,, \qquad f_Y(y) = \frac{2}{3}\int_0^1 (x+2y)dx = \frac{2}{3}(2y + \tfrac{1}{2})$$

Si verifica direttamente che

$$f(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$$

Dunque X, Y non sono indipendenti.