Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2020-21, II semestre
4 giugno, 2021

CP210 Introduzione alla Probabilità: Esonero 2

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nota:

1. L'unica cosa che si può usare durante l'esame è una penna o una matita. Tutto il resto (calcolatrice, libri, appunti, altri fogli di carta, ...) deve essere messo da parte.
2. Risposte implicite sotto forma di coefficienti binomiali, potenze, esponenziali ecc. sono benvenute. Mostrate in dettaglio il vostro lavoro.
3. Non parlate durante l'esame. Copiare o far copiare non è tollerabile.
4. Scrivete il vostro nome su ogni pagina. In caso di utilizzo di piu' pagine per un singolo esercizio indicare chiaramente l'ordine.
5. Il punteggio massimo per ogni esercizio è indicato nel testo. Notare che già con quattro esercizi risolti correttamente si arriva vicino al trenta.

Buon lavoro!

esercizio	1	2	3	4	5	totale
punti						
su	7	7	7	7	7	35

Nome:____

1. **(7 punti)** Siano X, Y, Z tre variabili aleatorie esponenziali di parametro $\lambda > 0$ indipendenti. Calcolare:

   (a) Il valore atteso di $(X+Y+Z)^2$.

   (b) La densità di probabilità di $\frac{X}{Y+Z}$

Soluzione:

1. Sappiamo che $X+Y+Z$ è una variabile $\Gamma(3,\lambda)$. Allora

$$E[(X+Y+Z)^2] = \frac{1}{\Gamma(3)} \int_0^\infty x^2 \lambda(\lambda x)^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\Gamma(3)\lambda^2} \int_0^\infty \lambda(\lambda x)^4 e^{-\lambda x} dx = \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(3)\lambda^2} = \frac{12}{\lambda^2}.$$

Allo stesso risultato si può arrivare direttamente calcolando

$$\begin{aligned} E[(X+Y+Z)^2] &= E[X^2+Y^2+Z^2+2XY+2XZ+2YZ] \\ &= E[X^2]+E[Y^2]+E[Z^2]+2E[X]E[Y]+2E[X]E[Z]+2E[Y]E[Z] \\ &= 6 \times \frac{2}{\lambda^2} = \frac{12}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

2. Sappiamo che $Y+Z$ è una variabile $\Gamma(2,\lambda)$ indipendente da X. Allora la densità congiunta di $(X, Y+Z)$ è

$$f(x,v) = f_X(x) f_{Y+Z}(v) = \lambda e^{-\lambda x} \lambda(\lambda v) e^{-\lambda v}\, \mathbf{1}_{x \geqslant 0} \mathbf{1}_{v \geqslant 0}.$$

Ne segue che, per ogni $t > 0$:

$$\begin{aligned} P\left(\frac{X}{Y+Z} > t\right) &= \int\int f(x,v)\mathbf{1}_{x \geqslant tv} dx dv = \int_0^\infty dv \lambda(\lambda v) e^{-\lambda v} \int_{tv}^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_0^\infty dv \lambda(\lambda v) e^{-\lambda v} e^{-\lambda t v} = \frac{1}{(1+t)^2}. \end{aligned}$$

Allora la densità di $\frac{X}{Y+Z}$ è data da

$$\varphi(t) = \frac{d}{dt} P\left(\frac{X}{Y+Z} \leqslant t\right) = -\frac{d}{dt} P\left(\frac{X}{Y+Z} > t\right) \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = \frac{2}{(1+t)^3}\, \mathbf{1}_{t \geqslant 0}.$$

Nome:____

2. **(7 punti)** Sia X la variabile aleatoria tale che $X = 1$ con probabilità $2/3$ e $X = -3$ con probabilità $1/3$. Siano $X_1, \ldots, X_n$ copie indipendenti di X e sia S_n la loro somma. Calcolare i seguenti limiti

   (a) $\lim_{n\to\infty} P(S_n \geqslant 0)$;

   (b) $\lim_{n\to\infty} P(S_n < -n)$;

   (c) $\lim_{n\to\infty} P(S_n > -n/3 + 2/n)$.

Soluzione: Notiamo che X_i ha media $\mu = 2/3 - 3(1/3) = -1/3$ e momento secondo $2/3 + 9(1/3) = 11/3$. Allora X_i ha varianza $\sigma^2 = 11/3 - (-1/3)^2 = 32/9$. Dunque S_n ha media $n\mu$ e varianza $n\sigma^2$. Per la LGN si ha $P(S_n \geqslant 0) \to 0$. Infatti, notiamo che $S_n \geq 0$ implica $|S_n - n\mu| \geq n/3$ e dunque usando la disuguaglianza di Chebyshev

$$P(S_n \geqslant 0) \leqslant P(|S_n - n\mu| \geq n/3) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{(n/3)^2} = \frac{9\sigma^2}{n}.$$

Allora

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n \geqslant 0) = 0.$$

Allo stesso modo, $S_n < -n$ implica $|S_n - n\mu| > 2n/3$ e dunque per la LGN

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n < -n) = 0.$$

Infine per il TLC la variabile $Z_n = (S_n - n\mu)/\sqrt{n\sigma^2}$ è approssimativamente $N(0,1)$ e dunque

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n > -n/3 + 2/n) = \lim_{n\to\infty} P(Z_n > 2/(n\sqrt{n\sigma^2})) = \frac{1}{2}.$$

Per verificare l'ultimo limite possiamo osservare che per ogni $\varepsilon > 0$ si ha, per n abbastanza grande,

$$1 - \Phi(0) + \varepsilon \geqslant P(Z_n > 0) \geqslant P(Z_n > 2/(n\sqrt{n\sigma^2})) \geqslant P(Z_n > \varepsilon) \geqslant 1 - \Phi(\varepsilon) - \varepsilon,$$

e dunque

$$P(Z_n > 2/(n\sqrt{n\sigma^2})) \in [1 - \Phi(\varepsilon) - \varepsilon, 1 - \Phi(0) + \varepsilon].$$

Poiché ε è arbitrariamente piccolo, e $\Phi(\varepsilon) \to \Phi(0)$ per $\varepsilon \to 0$, abbiamo che il limite esiste e deve soddisfare $P(Z_n > 2/(n\sqrt{n\sigma^2})) \to 1 - \Phi(0) = \frac{1}{2}$.

Nome:____

3. **(7 punti)** Lanciamo ripetutamente 2 dadi A,B. Sia X il numero di lanci necessario per ottenere per la prima volta 6 nel dado A e sia Y il numero di lanci necessario per ottenere per la prima volta 6 in entrambi i dadi. Calcolare:

   (a) la densità congiunta della coppia (X, Y);

   (b) il valore atteso della variabile $Y - X$;

   (c) la probabilità condizionata $P(Y = 4|X = 2)$.

Soluzione: (a). Notiamo che $(X, Y) = (i, j)$ ha probabilità zero se $i > j$. Se $i \leq j$, possiamo distinguere due casi: $(X, Y) = (i, i)$ e $(X, Y) = (i, j)$ con $j > i$. L'evento $(X, Y) = (i, i)$ significa che fino al lancio i-esimo escluso il dado A non ha avuto mai 6, e che al lancio i il dado A e il dado B hanno avuto entrambi 6. Dunque

$$p(i,i) = P((X,Y) = (i,i)) = \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \frac{1}{36}$$

L'evento $(X, Y) = (i, i)$ con $j > i$ significa che: fino al lancio i-esimo escluso il dado A non ha avuto mai 6, che al lancio i il dado A ha avuto 6 e il dado B non ha avuto 6, che tra il lancio $i + 1$ incluso e il lancio j escluso non hanno avuto entrambi 6, e che al lancio j hanno avuto entrambi 6. Dunque, se $j > i$ si ha

$$p(i,j) = P((X,Y) = (i,j)) = \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \left(\frac{35}{36}\right)^{j-i-1} \frac{1}{36}.$$

Si può verificare in effetti che

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty} p(i,j) &= \sum_{i=1}^{\infty} p(i,i) + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=i+1}^{\infty} p(i,j) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}\frac{1}{36} + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{i}\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{35}{36}\right)^{k}\frac{1}{36} = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1.\end{aligned}$$

(b). La variabile X è una geometrica di parametro $1/6$, mentre la Y è una geometrica di parametro $1/36$. Allora

$$E[Y - X] = E[Y] - E[X] = 36 - 6 = 30.$$

(c). Si ha

$$P(Y = 4|X = 2) = \frac{p(2,4)}{P(X = 2)} = \frac{(25 \times 35)/(6^3 \times (36)^2)}{5/36} = \frac{175}{6^5}.$$

Nome:______________________________________

4. **(7 punti)** Due variabili aleatorie X, Y hanno densità di probabilità congiunta

$$f(x,y) = c\, e^{-(x^2-2x+y^2-2y)}\,, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

dove c è una costante. Calcolare:

(a) il valore atteso $E[X]$;

(b) la covarianza $\mathrm{Cov}(X,Y)$;

(c) la probabilità dell'evento $(X,Y) \in \Omega$ dove Ω è la corona circolare

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \leqslant (x-1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 2\}.$$

Soluzione: Scriviamo $x^2 - 2x + y^2 - 2y = +(y-1)^2 - 2$. Dunque

$$f(x,y) = c\, e^2\, e^{-(x-1)^2} e^{-(y-1)^2}.$$

Allora X, Y sono indipendenti. Si ha

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x-1)^2} e^{-(y-1)^2} dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-1)^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y-1)^2} dy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \pi.$$

Allora $c = 1/(\pi e^2)$.

(a). Notiamo che la marginale X (e anche Y) è una normale $N(1, 1/2)$. Dunque X e Y sono due $N(1, 1/2)$ indipendenti. In particolare, $E[X] = 1$.

(b). Per l'indipendenza si ha $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

(c). Dobbiamo calcolare

$$\int\int_{\Omega} f(x,y) dxdy = \frac{1}{\pi} \int\int_{\Omega} e^{-(x-1)^2} e^{-(y-1)^2} dxdy.$$

Passando a coordinate polari di centro $(1,1)$ si ottiene

$$\int\int_{\Omega} f(x,y) dxdy = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}.$$

Nome:____

5. **(7 punti)** Tre persone arrivano alla fermata dell'autobus indipendentemente tra le 9:00 e le 9:10 a un orario aleatorio distribuito in maniera uniforme. Sappiamo che l'autobus passa, indipendentemente, tra le 9:00 e le 9:10 una sola volta alle ore 9:00+X dove la variabile aleatoria X, misurata in minuti, ha densità di probabilità

$$f_X(x) = \frac{x}{50}\,\mathbf{1}_{x\in[0,10]}.$$

Calcolare:

(a) La probabilità che tutte e tre le persone riescano a prendere l'autobus.

(b) La probabilità che almeno una persona riesca a prendere l'autobus.

Soluzione: Siano X_1, X_2, X_3 tre uniformi indipendenti nell'intervallo $[0, 10]$. La probabilità dell' evento nel punto (a) si può scrivere come

$$P(\max\{X_1, X_2, X_3\} < X).$$

Se $f_{\max}$ indica la densità di probabilità di $\max X_1, X_2, X_3$ allora abbiamo

$$P(\max\{X_1, X_2, X_3\} < X) = \int_0^{10} dt\, f_{\max}(t) \int_t^{10} f_X(x)dx.$$

Per calcolare $f_{\max}(t)$ osserviamo che $P(X_i \leqslant t) = t/10$ e dunque

$$f_{\max}(t) = \frac{d}{dt}P(\max\{X_1, X_2, X_3\} \leqslant t) = \frac{d}{dt}P(X_1 \leqslant t)^3 = 3t^2/10^3\,, \qquad t \in [0, 10].$$

Allora

$$P(\max\{X_1, X_2, X_3\} < X) = \int_0^{10} dt(3t^2/10^3) \int_t^{10} (x/50)dx = \int_0^{10} dt(3t^2/10^3)(10^2-t^2)/10^2 = \frac{2}{5}.$$

La probabilità dell' evento nel punto (b) si può scrivere come

$$P(\min\{X_1, X_2, X_3\} < X).$$

Se $f_{\min}$ indica la densità di probabilità di $\min X_1, X_2, X_3$ abbiamo

$$\begin{aligned} f_{\min}(t) &= \frac{d}{dt}P(\min\{X_1, X_2, X_3\} \leqslant t) = -\frac{d}{dt}P(\min\{X_1, X_2, X_3\} > t) \\ &= -\frac{d}{dt}P(X_1 > t)^3 = -\frac{d}{dt}(10-t)^3/10^3 = 3(10-t)^2/10^3\,, \qquad t \in [0, 10]. \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} P(\min\{X_1, X_2, X_3\} < X) &= \int_0^{10} dt(3(10-t)^2/10^3) \int_t^{10} (x/50)dx \\ &= \int_0^{10} dt(3(10-t)^2/10^3)(10^2-t^2)/10^2 = \frac{9}{10}. \end{aligned}$$

Nome:____