Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2022-23, II semestre
6 giugno, 2023

CP210 Probabilità: Esonero 2

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nota:

1. L'unica cosa che si puo' usare durante l'esame è una penna o una matita. Tutto il resto (calcolatrice, libri, appunti, altri fogli di carta, ...) deve essere messo da parte.
2. Risposte implicite sotto forma di coefficienti binomiali, potenze, esponenziali ecc. sono benvenute. Mostrate in dettaglio il vostro lavoro.
3. Non parlate durante l'esame. Copiare o far copiare non è tollerabile.
4. Scrivete il vostro nome su ogni pagina. In caso di utilizzo di piu' pagine per un singolo esercizio indicare chiaramente l'ordine.
5. Il punteggio massimo per ogni esercizio è indicato nel testo. Notare che già con quattro esercizi risolti correttamente si arriva vicino al trenta.

Buon lavoro!

esercizio	1	2	3	4	5	totale
punti						
su	7	7	7	7	7	35

Nome:______________________________________

1. **(7 punti)** Consideriamo lanci ripetuti di una moneta equa. Sia X il numero di lanci effettuati quando si ottiene per la prima volta testa, e sia Y il numero di lanci effettuati quando si ottiene per la seconda volta testa (in modo che $Y > X$).
   (a) Scrivere la densità di probabilità congiunta $p_{X,Y}$.
   (b) Calcolare le densità marginali p_X e p_Y.
   (c) Calcolare il valore atteso $\mathbb{E}[XY]$.

Soluzione: Notiamo che $X \in \mathbb{N}$ e $Y \in \mathbb{N}$, dove $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. X è Geometrica di parametro 1/2:

$$\mathbb{P}(X = x) = 2^{-x}\,, \qquad x \in \mathbb{N}\,.$$

Inoltre, se condizioniamo a $\{X = x\}$ si ha che $Y - x$ è Geometrica di parametro 1/2. Dunque

$$\mathbb{P}(Y = y | X = x) = \mathbf{1}_{\{y \geqslant x+1\}}\, 2^{-(y-x)}\,, \qquad x, y \in \mathbb{N}\,.$$

Allora,

$$p_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y|X = x) = \mathbf{1}_{\{y \geqslant x+1\}}\, 2^{-x}2^{-(y-x)} = \mathbf{1}_{\{y \geqslant x+1\}}\, 2^{-y}\,, \qquad x, y \in \mathbb{N}\,.$$

Per le marginali si ha

$$p_X(x) = \sum_{y \geqslant x+1} 2^{-y} = 2^{-x}\,, \qquad x \in \mathbb{N}\,,$$

e

$$p_Y(y) = \sum_{x \leqslant y-1} 2^{-y} = (y-1)2^{-y}\,, \qquad y \in \{2, 3, \dots\}\,.$$

Infine,

$$\mathbb{E}[XY] = \sum_{x,y \in \mathbb{N}} xy\ \mathbf{1}_{\{y \geqslant x+1\}}\, 2^{-y} = \sum_{y=2}^{\infty} y 2^{-y} \sum_{x=1}^{y-1} x = \tfrac{1}{2} \sum_{y=2}^{\infty} y^2 (y-1) 2^{-y} = 10,$$

dove abbiamo usato un calcolo esplicito della somma. Notiamo che allo stesso risultato si può arrivare in maniera piú semplice osservando che X e $(Y - X)$ sono geometriche di parametro 1/2 indipendenti e dunque

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[X(Y - X)] = \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[X]^2 = 6 + 4 = 10.$$

Nome:____

2. **(7 punti)** Sia B_n la v.a. binomiale di parametri n e $p = 2/3$. Calcolare le seguenti probabilità nel limite $n \to \infty$:

   (a) $\mathbb{P}(B_n \leqslant 3n/4)$

   (b) $\mathbb{P}(B_n \geqslant 2n/3)$

   (c) $\mathbb{P}(B_n \leqslant \sqrt{n})$

Soluzione: a) Per il teorema del limite centrale sappiamo che

$$Z_n = \frac{B_n - \mathbb{E}[B_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(B_n)}} \sim Z = N(0,1).$$

Si ha $\mathbb{E}[B_n] = 2n/3$ e $\mathrm{Var}(B_n) = 2n/9$. Allora $B_n \leqslant 3n/4$ equivale a

$$Z_n \leqslant \frac{(3/4 - 2/3)n}{\sqrt{2n/9}} = \frac{\sqrt{n}}{4\sqrt{2}} =: a_n.$$

Ma poiché $a_n \to \infty$ si ha che $\mathbb{P}(Z_n \leqslant a_n) \geqslant \mathbb{P}(Z_n \leqslant M) \sim \Phi(M)$, per ogni $M > 0$ se n abbastanza grande. Usando $\Phi(M) \to 1$, $M \to \infty$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n \leqslant 3n/4) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n \leqslant a_n) = 1 \tag{1}$$

Notiamo che alla stessa conclusione si può arrivare usando la legge dei grandi numeri.

b) Ragionando come sopra si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n \geqslant 2n/3) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n \geqslant 0) = \Phi(0) = \frac{1}{2}. \tag{2}$$

c) Infine $\mathbb{P}(B_n \leqslant \sqrt{n}) = \mathbb{P}(Z_n \leqslant b_n)$ dove $b_n \to -\infty$ e dunque si ha

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n \leqslant \sqrt{n}) = 0. \tag{3}$$

Anche qui notiamo che alla stessa conclusione si può arrivare usando la legge dei grandi numeri.

Nome:____

3. **(7 punti)** Siano X e Y due variabili esponenziali indipendenti di parametro λ, dove $\lambda > 0$ è una costante assegnata. Calcolare

   (a) $\mathrm{Var}\left(\min\{X,Y\}\right)$

   (b) $\mathbb{E}[\max\{X,Y\}]$

   (c) $\mathbb{E}\left[\sqrt{X+Y}\,\right]$

Soluzione: Il minimo di due esponenziali indipendenti è un'esponenziale di parametro 2λ e dunque

$$\mathrm{Var}\left(\min\{X,Y\}\right) = \frac{1}{4\lambda^2}.$$

Notiamo che $X+Y = \max\{X,Y\} + \min\{X,Y\}$, allora

$$\mathbb{E}[\max\{X,Y\}] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[\min\{X,Y\}] = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} = \frac{3}{2\lambda}.$$

La $X+Y$ è una variabile $\Gamma(2,\lambda)$ dunque

$$\mathbb{E}\left[\sqrt{X+Y}\,\right] = \int_0^\infty \sqrt{z}\,\lambda^2 z e^{-\lambda z} dz = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\infty \lambda^{5/2} z^{3/2} e^{-\lambda z} dz = \frac{\Gamma(5/2)}{\sqrt{\lambda}}.$$

Nome:____

4. **(7 punti)** Sia $t > 0$ un parametro e siano X, Y variabili aleatorie con distribuzione congiunta $f_{X,Y}$ data da

$$f_{X,Y}(x,y) = C(t)\,\exp\left(-\tfrac{x^2}{2t} - \tfrac{y^2}{4t}\right), \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

dove $C(t)$ è una costante dipendente da t. Calcolare, per ogni $t > 0$,

(a) Il valore della costante $C(t)$ e la covarianza $\mathrm{Cov}(X,Y)$;

(b) Il valore atteso $\mathbb{E}[(X-Y)^2]$;

(c) Il valore atteso $\mathbb{E}[\,e^{\sqrt{2}\,(X-Y)}]$;

Soluzione: La $f_{X,Y}$ ha la forma prodotto $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$, con $f_X(x) = C_1 e^{-x^2/2t}$ e $f_Y(y) = C_2 e^{-y^2/4t}$. Dunque si tratta di due v.a. normali indipendenti, con $X = N(0,t)$ e $Y = N(0, 2\,t)$:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\,\exp\left(-\tfrac{x^2}{2t}\right), \qquad f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\,\exp\left(-\tfrac{y^2}{4t}\right)$$

e quindi

$$C(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}\,\pi\,t}.$$

Poiché X, Y sono indipendenti si ha $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.
Inoltre $X - Y$ è normale con media 0 e varianza $t + 2t = 3t$. Allora $\mathbb{E}[(X-Y)^2] = 3t$, e ricordando che per ogni $s \in \mathbb{R}$ si ha $\mathbb{E}[e^{sZ}] = e^{s\mu + \frac{1}{2}\,s^2\,\sigma^2}$, se $Z = N(\mu, \sigma^2)$, otteniamo

$$\mathbb{E}[\,e^{\sqrt{2}\,(X-Y)}] = e^{\frac{1}{2}\times 2\times(3t)} = e^{3t}.$$

Nome:____

5. **(7 punti)** Un punto P del piano è scelto a caso con la seguente regola: si tira una moneta, se la moneta è testa allora P ha coordinate (X, Y) con densità congiunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{4}\exp\left(-|x|-|y|\right), \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

se invece la moneta è croce allora P ha coordinate (X, Y) uniformi nel disco di raggio 1 centrato nell'origine. Consideriamo le regioni

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| \leqslant 1\}, \qquad R' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |y| \leqslant 1\}.$$

Calcolare

(a) la probabilità $\mathbb{P}(P \in R)$;

(b) la probabilità $\mathbb{P}(P \in R \cap R')$

(c) la probabilità condizionata $\mathbb{P}(P \in R' \,|\, P \notin R)$.

Soluzione: Sia $W \in \{0, 1\}$ la v.a. di Bernoulli($\frac{1}{2}$) che indica il risultato della moneta. Allora se A è una regione del piano, il punto $P = (X, Y)$ soddisfa

$$\mathbb{P}(P \in A) = \tfrac{1}{2}\mathbb{P}(P \in A \,|\, W = 1) + \tfrac{1}{2}\mathbb{P}(P \in A \,|\, W = 0).$$

Ne segue che $P = (X, Y)$ ha densità congiunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \tfrac{1}{2\pi}\,\mathbf{1}_{x^2+y^2 \leqslant 1} + \tfrac{1}{8}\exp\left(-|x|-|y|\right), \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

Il disco di raggio 1 è contenuto in R e anche in R'. Dunque

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(P \in R) &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\int_{-1}^{1} dx \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-|x|-|y|\right) dy = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\int_{-1}^{1} \exp\left(-|x|\right) dx \\ &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}(1 - e^{-1}) = 1 - \tfrac{1}{2e}.\end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(P \in R \cap R') &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8}\int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} \exp\left(-|x|-|y|\right) dy \\ &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}(1 - e^{-1})^2 = 1 - \tfrac{1}{e} + \tfrac{1}{2e^2}.\end{aligned}$$

Per il calcolo di $\mathbb{P}(P \in R' \,|\, P \notin R)$ osserviamo che

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(P \in R' \,|\, P \notin R) &= \frac{\mathbb{P}(P \in R' \cap R^c)}{1 - \mathbb{P}(P \in R)} = \frac{\int_{-1}^{1} dy \int_{|x|>1} \frac{1}{8}\exp\left(-|x|-|y|\right) dx}{1/(2e)} \\ &= e\int_{0}^{1} e^{-y} dy \int_{1}^{\infty} e^{-x} dx = 1 - \tfrac{1}{e}.\end{aligned}$$