Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2023-24, II semestre
6 giugno, 2024

CP210 Probabilità: Esonero 2

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nota:

1. L'unica cosa che si puo' usare durante l'esame è una penna o una matita. Tutto il resto (calcolatrice, libri, appunti, altri fogli di carta, ...) deve essere messo da parte.
2. Risposte implicite sotto forma di coefficienti binomiali, potenze, esponenziali ecc. sono benvenute. Mostrate in dettaglio il vostro lavoro.
3. Non parlate durante l'esame. Copiare o far copiare non è tollerabile.
4. Scrivete il vostro nome su ogni pagina. In caso di utilizzo di piu' pagine per un singolo esercizio indicare chiaramente l'ordine.
5. Il punteggio massimo per ogni esercizio è indicato nel testo. Notare che già con quattro esercizi risolti correttamente si arriva vicino al trenta.

Buon lavoro!

esercizio	1	2	3	4	5	totale
punti						
su	7	7	7	7	7	35

Nome:____

1. **(7 punti)** Consideriamo il lancio di due dadi. Sia X il numero di 1 e sia Y il numero di 6.
   (a) Scrivere la densità di probabilità congiunta $p_{X,Y}$.
   (b) Calcolare le densità marginali p_X e p_Y.
   (c) Calcolare la covarianza $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Soluzione: Notiamo che $X \in \{0,1,2\}$ e $Y \in \{0,1,2\}$, e per ogni $(i,j) \in \{0,1,2\}^2$ si ha $p_{X,Y}(i,j) = \mathbb{P}(\{X=i, Y=j\})$, dove l'evento $\{X=i, Y=j\}$ indica che si ha i volte 1 e j volte 6. Inoltre per simmetria si deve avere $p_{X,Y}(i,j) = p_{X,Y}(j,i)$.
L'evento $(X,Y)=(0,0)$ equivale a $\{2,3,4,5\}$ per due volte e dunque $p_{X,Y}(0,0) = (4/6)^2 = 4/9$. L'evento $(X,Y)=(1,0)$ equivale a una volta 1 e zero volte 6, dunque gli esiti sono $(1,*), (*,1)$ dove $*$ indica un elemento di $\{2,3,4,5\}$ e quindi $p_{X,Y}(1,0) = 2(1/6)(4/6) = 2/9$. L'evento $(X,Y)=(1,1)$ equivale a una volta 1 e una volta 6, dunque gli esiti sono $(1,6),(6,1)$, e quindi $p_{X,Y}(1,1) = 2(1/6)(1/6) = 1/18$. L'evento $(X,Y)=(2,0)$ equivale a $(1,1)$, e quindi $p_{X,Y}(2,0) = (1/6)(1/6) = 1/36$. In conclusione, abbiamo la matrice 3×3

$$p_{X,Y} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 16 & 8 & 1 \\ 8 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sommando sulle colonne e sulle righe rispettivamente, si ottengono le marginali

$$p_X = p_Y = \frac{1}{36}(25, 10, 1)$$

Il valore atteso soddisfa

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = \sum_{j=0}^{2} i p_X(i) = \frac{10}{36} + 2\frac{1}{36} = \frac{1}{3}$$

La covarianza si ottiene calcolando

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} ij p_{X,Y}(i,j) - (1/3)^2 = \frac{2}{36} - \frac{1}{9} = -\frac{1}{18}.$$

Nome:____

2. **(7 punti)** Sia S_n la posizione dopo n passi di una passeggiata aleatoria con posizione iniziale $S_0 = 0$ e tale che ogni passo è $+1$ con probabilità $1/3$, -1 con probabilità $1/3$ e -2 con probabilità $1/3$. Calcolare le seguenti probabilità nel limite $n \to \infty$:

   (a) $\mathbb{P}(S_n \leqslant 0)$

   (b) $\mathbb{P}(S_n \geqslant -2n/3)$

   (c) $\mathbb{P}(|S_n| \leqslant \sqrt{n})$

Soluzione:

a. Il valor medio di S_n è $n\mathbb{E}[X]$ dove $X \in \{-1, -2, +1\}$ con probabilità $1/3, 1/3, 1/3$. Dunque $\mathbb{E}[S_n] = -2n/3$. Per la legge dei grandi numeri sappiamo allora che

$$\mathbb{P}(|S_n + 2n/3| > \varepsilon n) \to 0\,, \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0. \tag{1}$$

Osserviamo che se $\varepsilon \in (0, 2/3)$ si ha che $A_{n,\varepsilon} := \{|S_n + 2n/3| \leq \varepsilon n\}$ implica $S_n \leqslant 0$. Allora $\mathbb{P}(A_{n,\varepsilon}) \leq \mathbb{P}(S_n \leqslant 0)$ e per (1) abbiamo $\mathbb{P}(A_{n,\varepsilon}) \to 1$ dunque

$$\mathbb{P}(S_n \leqslant 0) \to 1\,, \qquad n \to \infty.$$

b. La varianza di S_n è $n\sigma^2$ dove $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$. Per il teorema del limite centrale sappiamo che

$$\mathbb{P}(S_n \geq -2n/3 + a\sigma\sqrt{n}) \to 1 - \Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty e^{-z^2/2} dz\,. \tag{2}$$

Ponendo $a = 0$ otteniamo

$$\mathbb{P}(S_n \geq -2n/3) \to \frac{1}{2}\,, \qquad n \to \infty.$$

c. Notiamo che $|S_n| \leqslant \sqrt{n}$ implica $A_{n,\varepsilon}^c := \{|S_n + 2n/3| > \varepsilon n\}$ se $\varepsilon \in (0, 2/3)$ è fissato e n è abbastanza grande. Per (1) abbiamo $\mathbb{P}(A_{n,\varepsilon}^c) \to 0$ e dunque

$$\mathbb{P}(|S_n| \leqslant \sqrt{n}) \leq \mathbb{P}(A_{n,\varepsilon}^c) \to 0\,, \qquad n \to \infty.$$

Nome:____

3. **(7 punti)** Carla e Francesco si danno appuntamento per andare a cena. Carla arriva a un orario uniformemente distribuito tra le 20:00 e le 21:00, mentre Francesco arriva a un orario uniformemente distribuito tra le 20:20 e le 20:50. Assumendo che i tempi di arrivo siano indipendenti, calcolare

   (a) la probabilità che arrivino entrambi prima delle 20:30;

   (b) la probabilità che Carla arrivi prima di Francesco;

   (c) il tempo medio di attesa tra chi arriva prima e chi arriva dopo.

Soluzione:

a. Diciamo che C è uniformemente distribuita in $[0,60]$ (minuti) e F è uniformemente distribuita in $[20,50]$ (minuti). L'evento che arrivino entrambi prima delle 20:30 equivale all'evento $A := \{C \in [0,30]\} \cap \{F \in [20,30]\}$. Per l'indipendenza abbiamo

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(C \in [0,30])\mathbb{P}(F \in [20,30]) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

b. La densità congiunta di C, F è data da $f(x,y) = \frac{1}{60\times 30}\mathbf{1}_{[0,60]}(x)\mathbf{1}_{[20,50]}(y)$. Allora

$$\mathbb{P}(C \leq F) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathbf{1}_{x\leq y} dxdy.$$

Per fare questo integrale possiamo calcolare l'area della porzione di rettangolo $R := [0,60] \times [20,50]$ ottenuta restringendo $(x,y) \in R$ a $x \leq y$. Da un semplice calcolo di superfici si ottiene

$$\mathbb{P}(C \leq F) = (20 \times 30 + (30 \times 30)/2)/(60 \times 30) = \frac{7}{12}.$$

c. Il tempo di attesa, in minuti, tra chi arriva prima e chi arriva dopo è dato da $|C - F|$. Dunque

$$\mathbb{E}[|C-F|] = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)|x-y|dxdy = \frac{1}{60\times 30}\int_0^{20} dx \int_{20}^{50} (y-x)dy$$
$$+ 2\frac{1}{60\times 30}\int_{20}^{50} dx \int_x^{50} (y-x)dy + \frac{1}{60\times 30}\int_{50}^{60} dx \int_{20}^{50} (x-y)dy = \frac{25}{3} + 5 + \frac{10}{3} = \frac{50}{3}.$$

Nome:______________________________________

4. **(7 punti)** Consideriamo due processi di Poisson indipendenti di parametro 1. Sia X_i il tempo di i-esimo arrivo per il primo processo e sia Y_i il tempo di i-esimo arrivo per il secondo processo. Per ogni $i, j \in \mathbb{N}$, calcolare

   (a) la densità congiunta della coppia di variabili (X_i, Y_j);

   (b) la varianza di $X_i - Y_j$;

   (c) la funzione generatrice dei momenti della variabile $X_i - Y_j$.

Soluzione:

a. Sia $f_{i,j} = f_{X_i,Y_j}$ la densità congiunta della coppia di variabili (X_i, Y_j). Per l'indipendenza si ha la forma prodotto $f_{i,j}(x,y) = f_{X_i}(x) f_{Y_j}(y)$. Inoltre sappiamo che X_i è una variabile $\Gamma(i,1)$ e Y_j è una variabile $\Gamma(j,1)$, dunque

$$f_{i,j}(x,y) = \frac{x^{i-1}e^{-x}y^{j-1}e^{-y}}{(i-1)!(j-1)!}\,\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)\mathbf{1}_{(0,\infty)}(y)$$

b. Per il calcolo della varianza osserviamo che $\mathbb{E}[X_i - Y_j] = i - j$, e

$$\mathbb{E}[(X_i - Y_j)^2] = \mathbb{E}[X_i^2] + \mathbb{E}[Y_j^2] - 2\mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[Y_j] = i + i^2 + j + j^2 - 2ij.$$

Allora

$$\mathrm{Var}(X_i - Y_j) = i + i^2 + j + j^2 - 2ij - (i-j)^2 = i + j.$$

Si poteva arrivare alla stessa conclusione osservando che per indipendenza si ha $\mathrm{Var}(X_i - Y_j) = \mathrm{Var}(X_i) + \mathrm{Var}(Y_j) = i + j$.

c. La funzione generatrice dei momenti della variabile $Z := X_i - Y_j$ soddisfa

$$M_Z(t) = \mathbb{E}\left[e^{t(X_i - Y_j)}\right] = \mathbb{E}\left[e^{tX_i}\right]\mathbb{E}\left[e^{-tY_j}\right] = \frac{1}{(1-t)^i(1+t)^j}\,, \qquad t \in (-1,1)\,,$$

mentre $M_Z(t) = +\infty$ se $t \notin (-1,1)$. Qui abbiamo usato l'indipendenza e il fatto che $\mathbb{E}\left[e^{tX_i}\right] = (1-t)^{-i}$, se $t < 1$, e $+\infty$ altrimenti, e dunque $\mathbb{E}\left[e^{-tX_i}\right] = (1+t)^{-i}$, se $t > -1$, e $+\infty$ altrimenti.

Nome:____

5. **(7 punti)** Un punto aleatorio $P = (X, Y)$ del piano è tale che le coordinate (X, Y) hanno densità congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} c\sqrt{x^2+y^2}\,, & \text{se } x^2+y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $c > 0$ è una costante. Sia D la distanza di P dall'origine. Calcolare

(a) il valore di c ;

(b) il valore atteso di D ;

(c) la varianza di D.

Soluzione: a. Passando a coordinate polari si ha

$$1 = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = 2\pi c \int_0^1 r^2 dr = \frac{2\pi c}{3}\,.$$

Allora $c = 3/(2\pi)$.
b. Per ogni $t \in [0,1]$ si ha

$$\mathbb{P}(D \leq t) = \int_{x^2+y^2 \leq t^2} f(x,y)dxdy = 3\int_0^t r^2 dr = t^3.$$

Differenziando, otteniamo che la variabile D ha densità $f_D(x) = 3x^2\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$. Allora

$$\mathbb{E}[D] = \int_{\mathbb{R}} x f_D(x)dx = \int_0^1 3x^3 dx = \frac{3}{4}.$$

c. Inoltre

$$\mathbb{E}[D^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_D(x)dx = \int_0^1 3x^4 dx = \frac{3}{5}.$$

Allora

$$\mathrm{Var}(D) = \mathbb{E}[D^2] - \mathbb{E}[D]^2 = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{3}{80}.$$