Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2024-25, II semestre
10 giugno, 2025

CP210 Probabilità: Esonero 2

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nota:

1. L'unica cosa che si puo' usare durante l'esame è una penna o una matita. Tutto il resto (calcolatrice, libri, appunti, altri fogli di carta, . . .) deve essere messo da parte.
2. Risposte implicite sotto forma di coefficienti binomiali, potenze, esponenziali ecc. sono benvenute. Mostrate in dettaglio il vostro lavoro.
3. Non parlate durante l'esame. Copiare o far copiare non è tollerabile.
4. Scrivete il vostro nome su ogni pagina. In caso di utilizzo di piu' pagine per un singolo esercizio indicare chiaramente l'ordine.
5. Il punteggio massimo per ogni esercizio è indicato nel testo. Notare che già con quattro esercizi risolti correttamente si arriva vicino al trenta.

Buon lavoro!

esercizio	1	2	3	4	5	totale
punti						
su	7	7	7	7	7	35

Nome:____

1. **(7 punti)** Siano X, Y due variabili di Poisson di parametro $\lambda > 0$ indipendenti, e sia $Z = X + Y$. Calcolare, in funzione di λ:

   (a) La densità di probabilità congiunta di (X, Z);

   (b) La covarianza $\mathrm{Cov}(X, Z)$;

   (c) La probabilità condizionata $P(X = j \mid Z = k)$ per ogni $j, k = 0, 1, 2, \ldots$.

Soluzione:

a. La densità di probabilità congiunta di (X, Z) è:

$$\begin{aligned} P(X = j, Z = k) &= P(X = j, Y = k - j) \\ &= P(X = j)P(Y = k - j) = e^{-2\lambda} \frac{\lambda^k}{j!\,(k-j)!} \mathbf{1}_{0 \le j \le k}, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato l'indipendenza tra X e Y.

b. Per la covarianza $\mathrm{Cov}(X, Z)$, usando l'indipendenza di X, Y, si ha

$$\mathrm{Cov}(X, Z) = \mathrm{Cov}(X, X + Y) = \mathrm{Cov}(X, X) + \mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Var}(X) = \lambda.$$

c. Calcoliamo la probabilità condizionata $P(X = j \mid Z = k)$: per $j \in \{0, \ldots, k\}$ si ha

$$P(X = j \mid Z = k) = \frac{\lambda^k e^{-2\lambda}/(j!\,(k-j)!)}{e^{-2\lambda}\frac{(2\lambda)^k}{k!}} = \binom{k}{j} 2^{-k},$$

dove abbiamo usato che Z è Poisson di parametro 2λ. Notiamo che, per ogni $k \ge 0$, condizionatamente a $\{Z = k\}$ si ha che X è binomiale di parametri k e $1/2$, indipendentemente da λ.

Nome:______________________________________

2. **(7 punti)** Siano S_n e S'_n le posizioni dopo n passi di due passeggiate aleatorie indipendenti, entrambe con posizione iniziale $S_0 = 0$ e tali che ogni passo è $+1$ con probabilità $1/2$, e -1 con probabilità $1/2$. Calcolare:

   (a) la media e la varianza di $S_n - S'_n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$;

   (b) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(S_n - S'_n \geq n/2\right)$;

   (c) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(S_n \geq S'_n - \sqrt{2n}\right)$.

Soluzione:

a. Il valor medio di S_n è 0 e dunque per linearità $\mathbb{E}[S_n - S'_n] = \mathbb{E}[S_n] - \mathbb{E}[S'_n] = 0$. La varianza di S_n è n, e dunque per l'indipendenza

$$\mathrm{Var}(S_n - S'_n) = \mathrm{Var}(S_n) + \mathrm{Var}(S'_n) = 2n\,.$$

b. Scriviamo $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ e $S'_n = \sum_{i=1}^n X'_i$, dove X_i e X'_i sono tutte indipendenti e identicamente distribuite con $X_i = \pm 1$ con probabilità $1/2, 1/2$, e lo stesso per X'_i. Abbiamo $S_n - S'_n = \sum_{i=1}^n Y_i$, con $Y_i = X_i - X'_i$. Il valore atteso di Y_i è 0, e la varianza è $\mathrm{Var}(Y_i) = 2$. Per la legge dei grandi numeri si ha

$$\mathbb{P}(|S_n - S'_n| \geq \varepsilon n) \to 0\,, \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0. \tag{1}$$

Allora $\mathbb{P}(S_n - S'_n \geq n/2) \leq \mathbb{P}(|S_n - S'_n| \geq n/2) \to 0$, $n \to \infty$.

c. Per il teorema del limite centrale $Z_n = (S_n - S'_n)/\sqrt{2n}$ è approssimata da una normale standard. Allora

$$\mathbb{P}(S_n - S'_n \geq -\sqrt{2n}) \to 1 - \Phi(-1) = \Phi(1) \approx 0.84\,, \tag{2}$$

dove $\Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{a} e^{-z^2/2} dz$.

Nome:____

3. **(7 punti)** Siano (X,Y) variabili aleatorie continue con densità di probabilità congiunta

$$f(x,y) = c\,e^{-2x}e^{-y^2/2}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)$$

dove $c>0$ è una costante. Calcolare

(a) per ogni $t\in\mathbb{R}$, il valore atteso di $e^{t(X+Y)}$;

(b) per ogni $t\in\mathbb{R}$, la probabilità $P(X>tY^2)$;

(c) la densità di probabilità di $\frac{X}{Y^2}$.

Soluzione: Notiamo che f è un prodotto di una densità esponenziale di parametro 2 e di una densità normale standard. Dunque $X = \mathrm{Esp}(2)$ e $Y = \mathrm{N}(0,1)$ sono indipendenti e $c = 2/\sqrt{2\pi}$.

a. Sia $M(t) = \mathbb{E}[e^{t(X+Y)}]$. Allora

$$M(t) = c\int_0^\infty e^{(t-2)x}\,dx \int_{-\infty}^\infty e^{ty-y^2/2}\,dy = \frac{2}{2-t}\,e^{t^2/2}, \quad t<2\,, \qquad M(t) = +\infty\,, \quad t\geq 2.$$

Riconosciamo il prodotto della f.g.m. di $\mathrm{Esp}(2)$ e della f.g.m. di $\mathrm{N}(0,1)$.

b. Per $t<0$ si ha $P(X>tY^2) = 1$ poiché $X\geq 0$. Per ogni $t\geq 0$ si ha

$$\begin{aligned} P(X>tY^2) &= \int_{-\infty}^\infty dy \int_{ty^2}^\infty c\,e^{-2x}e^{-y^2/2}\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{-2ty^2-y^2/2}\,dy = \frac{1}{\sqrt{4t+1}}\,, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato l'integrale Gaussiano $\int_{-\infty}^\infty e^{-ay^2}dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, per $a>0$.

c. Dunque

$$P(X/Y^2\leq t) = 1 - P(X>tY^2) = 1 - \frac{1}{\sqrt{4t+1}},$$

per $t\geq 0$ e $P(X/Y^2\leq t) = 0$ per $t<0$. Derivando rispetto a t, si ha la densità di probabilità

$$f_{X/Y^2}(t) = \frac{2}{(4t+1)^{3/2}}\,\mathbf{1}_{[0,\infty)}(t)\,.$$

Nome:____

4. **(7 punti)** Sia $P = (X, Y)$ un punto del piano scelto uniformemente a caso nel quadrato di lato 2 centrato nell'origine. Calcolare

   (a) la varianza di $X + Y$;

   (b) la probabilità $P\left(X^2 + Y^2 \le 1\right)$;

   (c) la probabilità $P(|X + Y| \le 1)$.

Soluzione:

a. Per il calcolo della varianza osserviamo che$X$ e Y sono indipendenti e uniformi in $[-1, 1]$, e dunque

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = \frac{4}{12} + \frac{4}{12} = \frac{2}{3}\,.$$

b. Notiamo che $X^2 + Y^2 \le 1$ equivale a $(X, Y) \in D_1$, dove D_1 è il disco di raggio 1 con centro nell'origine. Se Q_2 è il quadrato di lato 2 con centro nell'origine, poiché $D_1 \subseteq Q_2$, la probabilità che $(X, Y) \in D_1$ si può ottenere come rapporto fra le aree:

$$P\left(X^2 + Y^2 \le 1\right) = \frac{\mathrm{Area}(D_1)}{\mathrm{Area}(Q_2)} = \frac{\pi}{4}\,.$$

c. Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + y| \le 1\}$. Notiamo che $A \cap Q_2$ ha area $4 - 1 = 3$. Allora

$$P(|X + Y| \le 1) = \frac{\mathrm{Area}(A \cap Q_2)}{\mathrm{Area}(Q_2)} = \frac{3}{4}\,.$$

Nome:____

5. **(7 punti)** Un gioco consiste nel lanciare ripetutamente una freccetta su un tirassegno. Ad ogni lancio si ha probabilità 1/3 di fare 20 punti, probabilità 1/3 di fare 10 punti, e probabilità 1/3 di fare 0 punti. Sia T_n il numero totale di punti dopo n lanci. Assumendo l'indipendenza tra i lanci, calcolare

   (a) $P(T_4 \geq T_2 + 25)$;

   (b) la covarianza $\mathrm{Cov}(T_2, T_4)$;

   (c) $\lim_{n\to\infty} P(T_n \geq 15n)$.

Soluzione: a. Sia X_i il punteggio all'i-esimo lancio. Si ha $T_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Allora $T_4 - T_2 = X_3 + X_4$ e dunque

$$\begin{aligned} P(T_4 \geq T_2 + 25) &= P(X_3 + X_4 \geq 25) \\ &= P(X_3 = 10, X_4 = 20) + P(X_3 = 20, X_4 = 10) + P(X_3 = 20, X_4 = 20) \\ &= \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3} . \end{aligned}$$

b. Usando la linearità della covarianza e l'indipendenza delle X_i,

$$\mathrm{Cov}(T_2, T_4) = \mathrm{Cov}(T_2, T_2) + \mathrm{Cov}(T_2, X_3 + X_4) = \mathrm{Var}(T_2) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) .$$

La media di X_i è 10 e dunque $\mathrm{Var}(X_i) = \mathbb{E}((X_i - 10)^2) = 200/3$. Allora $\mathrm{Cov}(T_2, T_4) = 400/3$.

c. Notiamo che la media di T_n è $10n$, e dunque $T_n \geq 15n$ implica per T_n una deviazione dalla media di almeno $5n$. Allora per la legge dei grandi numeri

$$P(T_n \geq 15n) \leq P\left(\left| \frac{1}{n} T_n - 10 \right| \geq 5 \right) \to 0 , \quad n \to \infty .$$