

CP210 Probabilità: Esonero 2

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nota:

1. L'unica cosa che si puo' usare durante l'esame è una penna o una matita. Tutto il resto (calcolatrice, libri, appunti, altri fogli di carta, ...) deve essere messo da parte.
2. Risposte implicite sotto forma di coefficienti binomiali, potenze, esponenziali ecc. sono benvenute. Mostrate in dettaglio il vostro lavoro.
3. Non parlate durante l'esame. Copiare o far copiare non è tollerabile.
4. Scrivete il vostro nome su ogni pagina. In caso di utilizzo di piu' pagine per un singolo esercizio indicare chiaramente l'ordine.
5. Il punteggio massimo per ogni esercizio è indicato nel testo. Notare che già con quattro esercizi risolti correttamente si arriva vicino al trenta.

Buon lavoro!

esercizio	1	2	3	4	5	totale
punti						
su	7	7	7	7	7	35

Nome: _____

1. (7 punti) Siano X, Y, Z tre variabili aleatorie indipendenti, ciascuna con distribuzione di Poisson di parametro $\lambda > 0$. Poniamo

$$U = X + Y, \quad V = X + Y + Z.$$

Calcolare, in funzione di λ :

- (a) la densità di probabilità congiunta di (U, V) ;
- (b) la covarianza $\text{Cov}(U, V)$;
- (c) la probabilità condizionata $\mathbb{P}(U = j \mid V = k)$, per ogni $j, k = 0, 1, 2, \dots$.

Soluzione: Osserviamo che $U = X + Y$ ha distribuzione di Poisson di parametro 2λ ed è indipendente da Z . Inoltre $V = U + Z$. Dunque, per $j, k \in \{0, 1, 2, \dots\}$,

$$\mathbb{P}(U = j, V = k) = \mathbb{P}(U = j, Z = k - j) = e^{-3\lambda} \frac{(2\lambda)^j \lambda^{k-j}}{j!(k-j)!} \mathbf{1}_{\{0 \leq j \leq k\}}.$$

Per la covarianza, usando l'indipendenza tra U e Z ,

$$\text{Cov}(U, V) = \text{Cov}(U, U + Z) = \text{Var}(U) = 2\lambda.$$

Infine V ha distribuzione di Poisson di parametro 3λ , e quindi, se $0 \leq j \leq k$,

$$\mathbb{P}(U = j \mid V = k) = \frac{e^{-3\lambda} (2\lambda)^j \lambda^{k-j} / (j!(k-j)!)}{e^{-3\lambda} (3\lambda)^k / k!} = \binom{k}{j} \left(\frac{2}{3}\right)^j \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j}.$$

Se $j > k$ la probabilità condizionata è nulla. Dunque, condizionatamente a $\{V = k\}$, la variabile U è binomiale di parametri k e $2/3$.

Nome: _____

2. (7 punti) Sia S_n la posizione dopo n passi di una passeggiata aleatoria con posizione iniziale $S_0 = 0$ e tale che gli incrementi sono $+1$ con probabilità $\frac{1}{2}$, 0 con probabilità $\frac{1}{4}$, e -1 con probabilità $\frac{1}{4}$. Calcolare le seguenti probabilità nel limite $n \rightarrow \infty$:

- (a) $\mathbb{P}(S_n \leq 0)$;
- (b) $\mathbb{P}\left(S_n \geq \frac{n}{4}\right)$;
- (c) $\mathbb{P}(|S_n| \leq 2\sqrt{n})$.

Soluzione: Scriviamo $S_n = X_1 + \dots + X_n$, dove gli X_i sono indipendenti e identicamente distribuiti come X_1 , ossia $+1$ con probabilità $\frac{1}{2}$, 0 con probabilità $\frac{1}{4}$, e -1 con probabilità $\frac{1}{4}$. Si ha

$$\mathbb{E}[X_1] = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Inoltre

$$\mathbb{E}[X_1^2] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \quad \text{Var}(X_1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{16} = \frac{11}{16}.$$

Per la legge dei grandi numeri si ha $S_n \sim n/4$, ossia per ogni $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|S_n - n/4| > \varepsilon n) = 0.$$

Dunque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_n \leq 0) = 0.$$

Per il teorema del limite centrale,

$$Z_n := \frac{S_n - n/4}{\sqrt{\frac{11}{16}n}} \implies N(0, 1),$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(S_n \geq \frac{n}{4}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n \geq 0) = \mathbb{P}(N(0, 1) \geq 0) = \frac{1}{2}.$$

Infine l'evento $\{|S_n| \leq 2\sqrt{n}\}$ costringe S_n a stare a distanza dell'ordine n dal suo valore tipico $n/4$: fissato $\varepsilon \in (0, 1/4)$, per n grande si ha

$$\{|S_n| \leq 2\sqrt{n}\} \subseteq \{|S_n - n/4| > \varepsilon n\}.$$

Pertanto, ancora per la legge dei grandi numeri,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|S_n| \leq 2\sqrt{n}) = 0.$$

Nome: _____

3. (7 punti) Siano X e Y variabili aleatorie con densità congiunta

$$f(x, y) = c e^{-3x} e^{-y^2/8} \mathbf{1}_{[0, \infty)}(x), \quad x, y \in \mathbb{R},$$

dove $c > 0$ è una costante. Calcolare:

- (a) il valore della costante c e le densità di probabilità marginali f_X e f_Y ;
- (b) la probabilità che $X > Y^2$;
- (c) la densità di probabilità della variabile X/Y^2 .

Soluzione: Notiamo che la densità è prodotto di $h(x) = e^{-3x} \mathbf{1}_{[0, \infty)}(x)$ e $g(y) = e^{-y^2/8}$. Dunque

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_0^\infty e^{-3x} dx \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2/8} dy = \frac{1}{3} \sqrt{8\pi}.$$

Allora

$$c = \frac{3}{\sqrt{8\pi}}.$$

Inoltre, le variabili sono indipendenti e le marginali sono

$$f_X(x) = 3e^{-3x} \mathbf{1}_{[0, \infty)}(x), \quad f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-y^2/8}.$$

Sia $Z = X/Y^2$. Vogliamo $\mathbb{P}(X > Y^2) = 1 - \mathbb{P}(Z \leq 1)$. Calcoliamo $\mathbb{P}(Z \leq t) = \mathbb{P}(X \leq tY^2)$, per ogni $t \in \mathbb{R}$. Se $t < 0$ allora $tY^2 \leq 0$ e, poiché $X \geq 0$, si ha

$$\mathbb{P}(Z \leq t) = 0.$$

Se invece $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(Z \leq t) = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-y^2/8}}{\sqrt{8\pi}} dy \int_0^{ty^2} 3e^{-3x} dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-y^2/8}}{\sqrt{8\pi}} (1 - e^{-3ty^2}) dy = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+24t}}.$$

In particolare,

$$\mathbb{P}(X > Y^2) = 1 - \mathbb{P}(Z \leq 1) = 1/5.$$

Dunque

$$\mathbb{P}(Z \leq t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{1+24t}}, & t \geq 0. \end{cases}$$

Derivando otteniamo la densità

$$f_Z(z) = \frac{12}{(1+24z)^{3/2}} \mathbf{1}_{[0, \infty)}(z).$$

Nome: _____

4. (7 punti) Aldo e Barbara devono arrivare a scuola. Aldo aspetta un autobus che arriva a un tempo uniformemente distribuito tra le 8:00 e le 8:20. Una volta salito sull'autobus, Aldo impiega 20 minuti per arrivare a scuola. Barbara parte alle 8:00 in bicicletta e il suo tempo di percorrenza, in minuti, ha distribuzione normale di media 30 e varianza 25. Assumiamo che tutti i tempi considerati siano indipendenti. Calcolare:

- (a) la probabilità che arrivino entrambi entro le 8:30;
- (b) la probabilità che Barbara arrivi a scuola tra le 8:25 e le 8:35;
- (c) la probabilità che Aldo arrivi a scuola prima di Barbara.

Soluzione: Misuriamo i tempi in minuti a partire dalle 8:00. Sia U il tempo di arrivo dell'autobus. Allora

$$U \sim \text{Unif}([0, 20])$$

e il tempo di arrivo a scuola di Aldo è $A = U + 20$. Sia invece B il tempo di arrivo a scuola di Barbara. Per ipotesi $B \sim N(30, 25)$, cioè $B = 30 + 5Z$, dove $Z \sim N(0, 1)$. Per il primo punto, la probabilità che arrivino entrambi entro le 8:30 è

$$\mathbb{P}(A \leq 30, B \leq 30) = \mathbb{P}(A \leq 30)\mathbb{P}(B \leq 30) = \mathbb{P}(U \leq 10)\mathbb{P}(Z \leq 0) = \frac{1}{4},$$

dove abbiamo usato $\mathbb{P}(U \leq 10) = \mathbb{P}(Z \leq 0) = \frac{1}{2}$.

Per il secondo punto,

$$\mathbb{P}(25 \leq B \leq 35) = \mathbb{P}(-1 \leq Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 \approx 0.68,$$

dove Φ indica la funzione di distribuzione della normale standard.

Per il terzo punto, per l'indipendenza tra U e Z sappiamo che la densità congiunta di U, Z è il prodotto delle densità marginali. Inoltre $B > A$ equivale a $Z > -2 + U/5$ e dunque

$$\mathbb{P}(A < B) = \frac{1}{20} \int_0^{20} dx \int_{-2 + \frac{x}{5}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz = \frac{1}{20} \int_0^{20} (1 - \Phi(-2 + \frac{x}{5})) dx.$$

Dunque, con il cambio di variabile $z = -2 + \frac{x}{5}$,

$$\mathbb{P}(A < B) = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 (1 - \Phi(z)) dz.$$

Usando la simmetria della normale standard, $1 - \Phi(z) = \Phi(-z)$, e quindi

$$\int_{-2}^2 (1 - \Phi(z)) dz = \int_{-2}^2 \Phi(-z) dz = \int_{-2}^2 \Phi(z) dz.$$

Allora

$$2 \int_{-2}^2 (1 - \Phi(z)) dz = \int_{-2}^2 (1 - \Phi(z)) dz + \int_{-2}^2 \Phi(z) dz = \int_{-2}^2 dz = 4.$$

Pertanto

$$\mathbb{P}(A < B) = \frac{1}{2}.$$

Nome: _____

5. (7 punti) Un punto aleatorio $P = (X, Y)$ è generato nel seguente modo. Si estrae una variabile di Bernoulli B con

$$\mathbb{P}(B = 1) = \mathbb{P}(B = 0) = \frac{1}{2}.$$

Se $B = 0$, il punto P è uniforme nel quadrato $[-1, 1]^2$. Se $B = 1$, il punto P è uniforme nel disco unitario

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Sia

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1/4\}.$$

Calcolare:

- (a) la probabilità $\mathbb{P}(P \in A)$;
- (b) la probabilità $\mathbb{P}(P \in D)$;
- (c) la probabilità condizionata $\mathbb{P}(B = 1 \mid P \in A)$.

Soluzione: Il disco A ha raggio $1/2$, quindi area $\pi/4$. Il quadrato $[-1, 1]^2$ ha area 4 , mentre il disco unitario D ha area π .

Usando la formula della probabilità totale,

$$\mathbb{P}(P \in A) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(P \in A \mid B = 0) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(P \in A \mid B = 1).$$

Se $B = 0$, il punto è uniforme nel quadrato, e quindi

$$\mathbb{P}(P \in A \mid B = 0) = \frac{\text{Area}(A)}{4} = \frac{\pi}{16}.$$

Se $B = 1$, il punto è uniforme in D , e quindi

$$\mathbb{P}(P \in A \mid B = 1) = \frac{\text{Area}(A)}{\text{Area}(D)} = \frac{\pi/4}{\pi} = \frac{1}{4}.$$

Pertanto

$$\mathbb{P}(P \in A) = \frac{1}{2} \frac{\pi}{16} + \frac{1}{2} \frac{1}{4} = \frac{\pi + 4}{32}.$$

Analogamente,

$$\mathbb{P}(P \in D) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(P \in D \mid B = 0) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(P \in D \mid B = 1) = \frac{1}{2} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} = \frac{\pi + 4}{8}.$$

Infine, per la formula di Bayes,

$$\mathbb{P}(B = 1 \mid P \in A) = \frac{\mathbb{P}(B = 1)\mathbb{P}(P \in A \mid B = 1)}{\mathbb{P}(P \in A)} = \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{4}}{(\pi + 4)/32} = \frac{4}{\pi + 4}.$$

Nome: _____