Roma, 13 Maggio 2010

Esercizio 1. Un professore furbo capisce che il punteggio (in centesimi) del test di uno studente che sostenga l'esame del suo corso si distribuisce come una variabile aleatoria di media 75. Come potrebbe stimare il limite superiore alla probabilità che il punteggio del test dello studente sia superiore a 85? Se poi il professore è molto scaltro, supponi che riesca a capire che la varianza del risultato del test sia uguale a 25. Cosa potremmo dire circa la probabilità che il risultato sia compreso tra 65 e 85? Quanti studenti devono sostenere il test, per essere sicuri con probabilità pari ad almeno 0.9, che la votazione media della classe sia compresa tra 70 e 80?
Nota: Risolvere quest'ultimo quesito con e senza TLC.

Esercizio 2. In una roulette con numeri rossi, blu e grigi, sia r la percentuale di numeri rossi e b di quelli blu, quindi $r + b < 1$. I grigi rappresentano lo o gli zeri a secondo della struttura della roulette. Siano N_r, N_b le variabili che contano su n giri rispettivamente il numero di rossi e blu che sono usciti.Calcolare il coefficiente di correlazione $\rho(N_r, N_b)$.

Esercizio 3. Un dado equilibrato viene lanciato 900 volte e indichiamo con X il numero di volte che compare il 6. Quanto valgono $\mathbb{E}[X]$ e $\mathbb{P}(X \geq 180)$? Supponiamo di sapere dell'esistenza di una partita con alcuni dadi truccati che producono il 6 con probabilità $\frac{2}{9}$. Per decidere se un dado è di questi ultimi usiamo la procedura seguente: lo lanciamo 900 volte e decidiamo che è truccato se si ottiene il 6 più di 180 volte. Qual è la probabilità che un dado truccato venga effettivamente individuato?

Esercizio 4. Vogliamo stimare la probabilità incognita p con la quale una moneta esibisce testa. Per farlo si osserva la percentuale di teste uscite su n lanci. Volendo approssimare p con tale percentuale, quanto deve essere grande n affinchè con probabilità maggiore di 0,99 l'errore commesso sia al più 0,1?
Suggerimento: usare Chebyshev.

Esercizio 5. Il tempo che un dato componente funziona prima di guastarsi è dato da una variabile aleatoria con densità $f(x) = 2x$ per $x \in [0, 1]$. Una volta che il componente si guasta, viene immediatamente rimpiazzato. Sia X_i il tempo di vita del componente $i-$esimo messo in uso, allora $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ rappresenta il momento dell' $n-$esimo guasto. Il tasso a lungo termine al quale i guasti avvengono, chiamiamolo r, è definito da

$$r = \lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n}$$

Supponendo che le variabili aleatorie X_i siano indipendenti, chi può essere un candidato per r?
Quanti componenti si dovrebbero possedere per essere sicuri (approssimativamente) al 90 per cento che la scorta sia sufficente per almeno 35 giorni?

Esercizio 6. Una particella compie una passegiata aleatoria sulla retta reale con salti casuali $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ ai tempi discreti $t = 1, 2, ...$ Le variabili $\{\xi_i\}_{i=1}^{+\infty}$ sono i.i.d. $N(\mu, 1)$. Se X_t denota la posizione della particella al tempo t dimostrare che esiste (e trovare) una costante $K \in \mathbb{R}$ tale che $\forall\, \varepsilon > 0$ fissato, la probabilità che $\frac{X_t}{t}$ si discosti da K più di ε tende a zero per $t \to +\infty$.