Roma, 18 Marzo 2010

Esercizio 1. Un tetraedro regolare con le facce numerate da 1 a 4 viene lanciato 3 volte. Sia x_i il risultato del lancio $i-$esimo per $i = 1, 2, 3$ e siano $A_1 = \{x_1 = x_2\}$ e $A_2 = \{x_2 = x_3\}$, $A_3 = \{x_3 = x_1\}$. Stabilire se

i) Gli eventi A_1, A_2 e A_3 sono a due a due indipendenti.

ii) $\{A_1, A_2, A_3\}$ è una famiglia di eventi indipendenti.

Esercizio 2. Siano A e B due eventi con probabilità strettamente positive. Dire se le seguenti affemazioni sono vere, false o possono essere vere

i) Se A e B sono disgiunti, allora sono indipendenti.

ii) Se A e B sono indipendenti, allora sono disgiunti.

iii) $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 0,6$ ed A e B sono disgiunti.

iv) $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 0,6$ ed A e B sono indipendenti.

Dimostrare inoltre che, se l'evento A è indipendente da sé stesso, allora

v) $\mathbb{P}(A)$ è uguale a 0 oppure a 1.

vi) A è indipendente da tutti gli altri eventi E.

Esercizio 3. Sia $\Omega = \{1, 2, ..., p\}$ con p numero primo. Sia $\mathcal{F}$ l'insieme delle parti di Ω, ovvero $\mathcal{F} = \mathscr{P}(\Omega)$. Per ogni $E \in \mathcal{F}$ definiamo $\mathbb{P}(E) = \frac{|E|}{p}$. Mostrare che, se $A, B \in \mathcal{F}$ sono indipendenti, allora almeno uno tra A e B è necessariamente $\emptyset$ oppure Ω.

Esercizio 4. La probabilità che una persona ospite di un ristorante sia soddisfatta del pasto è $p \in (0, 1)$. Si intervistano n persone a caso fuori da un ristorante. Sia Y la variabile casuale che indica il numero di persone soddisfatte tra le n intervisate. Qual è, per $0 < m < n$, $\mathbb{P}(Y = m)$?

Esercizio 5. Sia n il tuo numero preferito compreso tra 1 e 10. Un dado equo a 10 facce viene lanciato fintanto che non esce la faccia n. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di lanci. Calcolare $\mathbb{P}(X = k)$.

Esercizio 6. Un'urna contiene 112 dadi a sei facce di cui 56 equi e 56 truccati. Nei dadi truccati la faccia 1 esce con probabilità 1/2 e le altre facce con probabilità 1/10. Si estrae a caso un dado, se X è la variabile aleatoria che indica il risultato del lancio, calcolare $\mathbb{P}(X = 3)$, $\mathbb{P}(X = 1)$ e $\mathbb{P}(X = 5)$. Se il dado estratto viene lanciato due volte e indico con X_i il risultato del lancio $i-$esimo per $i \in \{1, 2\}$, calcolare la probabilità che il dado sia truccato sapendo che $X_1 = 2$ e $X_2 = 3$.