Roma, 25 Marzo 2010

Esercizio 1. Sia X una variabile casuale con media $\mathbb{E}[X] = \mu \in \mathbb{R}$ e tale che $\mathbb{E}\left[X^2\right] < +\infty$. Mostrare che

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu^2$$

Esercizio 2. Mostrare che

$$\min_{a \in \mathbb{R}} \mathbb{E}\left[(X-a)^2\right] = \mathrm{Var}(X).$$

Come interpretiamo questo fatto?

Esercizio 3. Delle seguenti variabili aleatorie determinare distribuzione, media e varianza

i) Si lanciano due dadi equi ciascuno dei quali ha due facce 1, due facce 2 e due facce 3. $X =$ somma dei punteggi ottenuti

ii) Si lanciano due dadi equi a sei facce. Detti x_1 e x_2 i risulati dei due lanci $X = |x_1 - x_2|$ e $Y = \min\{x_1, x_2\}$

Esercizio 4. Nel gioco della briscola si attribuisce il valore 11 agli assi, 10 ai tre, valore 4, 3, 2 a re, cavalli e fanti rispettivamente. Calcolare valore medio e varianza della variabile casuale $X =$ valore di una carta estratta dal mazzo.

Esercizio 5. Dare un esempio di

i) una variabile casuale con media nulla e varianza positiva;

ii) una variabile casuale Y tale che $\mathbb{E}[Y] = 2$ e $\mathrm{Var}(Y) = 0$.

Esercizio 6. Un calcolatore è collegato ad una rete che permette l'accesso ad un massimo di 20 persone. Collegati a questa rete vi sono i terminali di 24 operatori, ognuno dei quali, ad un dato istante, richiede con probabilità $p = 0,6$ di essere connesso al calcolatore centrale. Qual è la probabilità che ad un dato istante la rete sia satura?

Esercizio 7. Si consideri la seguente equazione

$$x^2 - 2x + A = 0$$

Dove A è una variabile aleatoria con distribuzione

$$\mathbb{P}\left(A = \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad \mathbb{P}\left(A = \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \quad \mathbb{P}\left(A = \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}$$

Per ogni valore di A l'equazione ammette due soluzioni reali e distinte. Siano X_1 e X_2 con $X_1 < X_2$. Dopo aver espresso X_1 e X_2 in funzione di A, calcolare

i) $\mathbb{E}[X_2 - X_1]$

ii) $\mathrm{Var}(X_2 - X_1)$