

Esercizio 1. Determinare la costante C (se esiste) affinché le seguenti funzioni siano densità di probabilità:

$$i) f_X(x) = x(C - x^2) \chi_{\{x \in [0,2]\}}$$

$$ii) f_X(x) = Cx^n e^{-x} \chi_{\{x \in [0,+\infty)\}}$$

$$iii) f_X(x) = C \sin x \chi_{\{x \in [-\pi, \pi]\}}$$

Esercizio 2. Sia $Y \sim U(0, 5)$. Calcolare la probabilità che siano reali le radici dell'equazione

$$4x^2 + 4xY + Y + 2 = 0$$

Esercizio 3. Una formica passeggia in una stanza di dimensioni $5 \times 4 \times 3$ (dove 3 è l'altezza). Se la si guarda in un istante a caso, qual è la probabilità che la formica sia sul soffitto? E sulle pareti?

Se una mosca vola nella stessa stanza qual è la probabilità che voli ad almeno un metro di distanza dalle pareti?

Esercizio 4. Un punto A è scelto uniformemente sull'intersezione della circonferenza di raggio $R = 1$ e il I quadrante del piano. Sia X l'ascissa di A . Calcolare la densità di X .

Esercizio 5. Alla stazione Termini ogni 15 min dalle 7:00 parte un treno per Bologna e ogni 15 min dalle 7:05 ne parte uno per Napoli. Se arrivo a Termini in un istante uniformemente distribuito tra le 7:00 e le 8:00 e prendo il primo treno che parte tra i suddetti, calcolare la probabilità di andare a Bologna

Esercizio 6. Siano \mathcal{U}_1 e \mathcal{U}_2 variabili casuali indipendenti uniformemente distribuite in $[0, 1]$ e siano

$$X = \min\{\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2\}$$

$$Y = \max\{\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2\}$$

Trovare

i) Le densità $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ delle variabili X e Y .

ii) La densità e la media della variabile casuale

$$W = \frac{1}{Y^2}$$

Esercizio 7. Le variabili casuali X e Y sono indipendenti e distribuite con legge normale rispettivamente di parametri $\mu_X = 0$, $\sigma_X^2 = 1$ e $\mu_Y = 0$, $\sigma_Y^2 = 2$. Calcolare la probabilità che il punto aleatorio $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ cada nelle regioni

$$i) A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 2\}$$

$$ii) B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4\}$$