Esercizio 1. Siano X e Y variabili aleatorie bernoulliane indipendenti ognuna di parametro $\frac{1}{2}$. Dire se sono indipendenti le variabili aleatorie $W = X + Y$ e $Z = |X - Y|$.

Esercizio 2. Siano X_1, X_2, X_3 e X_4 variabili indipendenti con distribuzione normale standard. Calcolare $\mathbb{P}(4X_1 + 3X_2 < X_3 + X_4)$.

Esercizio 3. Fissati $a, b > 0$ siano $X \sim U(0, a)$, $Y \sim U(-b, 0)$ e $Z = X + Y$. Calcolare la densità di Z, $\mathbb{E}[Z]$ e a $\mathrm{Var}(Z)$.

.

SUGGERIMENTO: Affrontare prima il caso $a = b$

Esercizio 4. Una moneta ed un dado vengono lanciati più volte insieme. Sia $E = \{\,\text{Testa esce prima della faccia 6}\,\}$. Calcolare la media della variabile aleatoria X così definità

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se si verifica } E \\ 0 & \text{alrimenti} \end{cases} .$$

Esercizio 5. La collezione delle figurine dei matematici più belli del mondo è composta di n elementi. Un pacchetto contiene una sola figurina. Ogni figurina è equiprobabilmente contenuta in ogni pacchetto. Siccome la collezione è molto avvincente, si compra un pacchetto al giorno. Calcolare:

i) il numero medio di giorni che passano tra l'acquisizione della $j-$esima nuova figurina e della $(j + 1)-$esima.

ii) il numero medio di giorni necessari a finire la collezione.

Esercizio 6. Siano X e Y variabili aleatorie discrete con densità congiunta

$$f(x, y) = \frac{C}{(x + y - 1)(x + y)(x + y + 1)} \qquad x, y = 1, 2, 3...$$

Calcolare C e le marginali di X e Y. Calcolare inoltre la distribuzione di $U = X + Y$ e $V = X - Y$.

Esercizio 7. Siano X e Y variabili aleatorie indipendenti. Dimostrare che

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$$

Mostrare con un controesempio che l'ipotesi di indipendenza di X e Y è necessaria.

Esercizio 8. In un'industria si producono macchinari composti da due componenti. Tali macchinari subiscono 3 tipi di guasti: il primo guasto danneggia il primo componente, il secondo guasto il secondo componente ed il terzo entrambi i componenti. É noto che i guasti sono indipendi tra loro e che il tempo T_i in cui l'$i-$esimo guasto si realizza segue una legge esponenziale di parametro λ_i $i = 1, 2, 3$. Se X_j sono le variabili aleatorie che indicano i tempi in cui si danneggia il $j-$esimo componente per $j = 1, 2$ Calcolate:

a) $\mathbb{P}(X_1 > s,\, X_2 > t)$.

b) $\mathbb{P}(T_1 \geq 3T_2)$.