CP2 – Esame

14 febbraio 2007

Esercizio 1. *Illustrare con esempi e cenni di dimostrazione le diverse nozioni di convergenza associate a successioni di variabili aleatorie.*

Esercizio 2. *Si consideri la catena di Markov con spazio degli stati* $S := \{-1, 0, -1\}$ *e matrice di transizione* P^ε *tale che* $P^\varepsilon(-1,-1) = 1-\varepsilon$, $P^\varepsilon(-1,0) = \varepsilon$; $P^\varepsilon(0,-1) = P^\varepsilon(0,1) = \frac{1}{2}$; $P^\varepsilon(1,0) = \varepsilon$, $P^\varepsilon(1,1) = 1-\varepsilon$, *dove* $\varepsilon \in (0,1)$ *è un parametro. Ossia abbiamo*

$$P^\varepsilon = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \varepsilon & 1-\varepsilon \end{pmatrix}$$

(1) Calcolare le misure reversibili e invarianti associate a P^ε.

(2) Per $x \in S$ *assegnato, sia* $\{Z_n^{\varepsilon,x},\ n \in \mathbb{N}\}$ *la catena di Markov con stato iniziale* $Z_0^{\varepsilon,x} = x$ *e matrice di transizione* P^ε. *Mostrare che per ogni* $\varepsilon \in (0,1)$ *e per ogni* $x \in S$, $Z_n^{\varepsilon,x}$ *converge in distribuzione, per* $n \to \infty$, *a una v.a.* Y^ε *indipendente da* x.

(3) Mostrare che a sua volta la Y^ε *converge in distribuzuione per* $\varepsilon \to 0$ *e calcolarne il limite.*

Esercizio 3. *Siano* $X_1, \ldots, X_k$ *v.a. indipendenti con distribuzione geometrica di parametro* $p \in (0,1)$. *Mostrare che per ogni* $k \in \mathbb{N}$ *fissato, la v.a.*

$$p\,(X_1 + \cdots X_k)$$

converge in distribuzione per $p \to 0$ *e descriverne il limite.*

Esercizio 4. *Siano* Y_n, $n \in \mathbb{N}$ *variabili indipendenti con distribuzione di Poisson di parametro* $\lambda_n := \frac{1}{n^\alpha}$, *dove* $\alpha > 0$ *è assegnato. Dimostrare che* $Y_n \to 0$ *quasi certamente, per* $n \to \infty$, *se e solo se* $\alpha > 1$. *Se* $m \in \mathbb{N}$ *è fissato, per quali valori di* $\alpha > 0$ *si ha* $\limsup_{n\to\infty} Y_n \geqslant m$ *quasi certamente?*

Esercizio 5. *Sia* X_n, $n \in \mathbb{N}$ *la passeggiata aleatoria simmetrica su* $\mathbb{Z}$ *con condizione iniziale* $X_0 = 0$ *e sia* $\mathcal{F}_n$ *la filtrazione naturale associata. Sia* τ *il tempo di primo ritorno in* 0. *Dimostrare che*

(1) τ *è un tempo di arresto rispetto a* $\mathcal{F}_n$

(2) $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$

(3) $\mathbb{E}[\tau] = +\infty$

Esercizio 6. *Sia* X *una v.a. su uno spazio di probabilità* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *e sia* $\mathcal{G}$ *una sotto sigma algebra di* $\mathcal{F}$. *Discutere con cenni di dimostrazione l'esistenza e l'unicità dell'aspettazione condizionata* $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$.