CP2 – Esame
25 gennaio 2007

Esercizio 1. *Discutere con esempi e cenni di dimostrazione la legge debole e la legge forte dei grandi numeri.*

Esercizio 2. *Siano* $X_1, X_2, \dots$ *v.a. indipendenti con distribuzione di Bernoulli di parametro* $p \in (0,1)$ *assegnato. Sia*

$$Z_n = \frac{1}{p^n} \prod_{i=1}^{n} X_i \,.$$

(1) Dimostrare che Z_n *è una martingala rispetto alla filtrazione naturale.*
(2) Sia $\tau = \inf\{n \geqslant 1 : \ Z_n = 0\}$. *Dimostrare che* τ *è un tempo di arresto.*
(3) Calcolare la distribuzione di τ.
(4) Dimostrare che $\lim_{n\to\infty} Z_n = 0$ *quasi certamente.*

Esercizio 3. *Enunciare il teorema del limite centrale e dare cenni di dimostrazione.*

Esercizio 4. *Sia* $X_1, X_2, \dots$ *una successione di v.a. indipendendti positive ciascuna con densità di probabilità*

$$f(t) = \lambda^2 \, t \, e^{-\lambda t} \,, \qquad t \geqslant 0 \,,$$

per un certo $\lambda > 0$ *assegnato. Usando il teorema del limite centrale si dimostri che*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X_1 + \cdots + X_n \geqslant \frac{2n}{\lambda} \right) = \frac{1}{2} \,.$$

Esercizio 5. *Sia* $\{Y_n\}$ *una successione di v.a. su uno spazio di probabilità assegnato.*
(1) Mostrare che se $Y_n \to 0$ *q.c. allora* $Y_n \to 0$ *in probabilità.*
(2) Mostrare che in generale il viceversa non è valido.

Esercizio 6. *Si consideri la catena di Markov con spazio degli stati* $S := \{-N, \dots, N\}$, *per un dato* $N \in \mathbb{N}$, *e con matrice stocastica* $P(i,j)$, $i, j \in S$ *tale che:*

$$\begin{aligned}
&P(-N,-N) = 1-p \,,\ P(-N,-N+1) = p \,, \\
&P(i,i-1) = 1-p \,,\ P(i,i+1) = p \,, \ \ -N+1 \leqslant i \leqslant \ -1 \\
&P(0,-1) = P(0,1) = 1-p \,,\ P(0,0) = 2p-1 \\
&P(i,i-1) = p \,,\ P(i,i+1) = 1-p \,, \ \ 1 \leqslant i \leqslant N-1 \\
&P(N,N-1) = p \,,\ P(N,N) = 1-p \,, \ \ ,
\end{aligned}$$

per un certo $p \in [\frac{1}{2}, 1)$ *assegnato.*

(1) Dimostrare che la catena è regolare.
(2) Sia ν *il vettore di probabilità definito da* $\nu(i) := c\,\lambda^{|i|}$, $i \in S$, *con* $\lambda = \frac{1-p}{p}$ *e con costante di normalizzazione data da* $c = (\sum_{i=-N}^{N} \lambda^{|i|})^{-1}$. *Dimostrare che* ν *è l'unica misura reversibile della catena.*
(3) Sia μ *un arbitrario vettore di probabilità su* S *e sia* X_n *la catena di Markov associata a* P *e con distribuzione iniziale* μ. *Calcolare* $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 0)$.

Soluzioni

Soluzione Esercizio 2: Possiamo scrivere $Z_n = \prod_{i=1}^n Y_i$ dove $Y_i = X_i/p$ sono v.a. indipendenti con media 1. Quindi Z_n è una martingala rispetto alla filtrazione naturale $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n) = \sigma(X_1, \dots, X_n)$. Osserviamo che

$$\{\tau = n\} = \{X_1 = \cdots X_{n-1} = 1\} \cap \{X_n = 0\} \in \mathcal{F}_n \,. \tag{0.1}$$

Quindi τ è tempo di arresto rispetto alla filtrazione naturale. Inoltre la (0.1) mostra che $\mathbb{P}(\tau = n) = (1-p)\, p^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, e quindi τ è una geometrica di parametro $1-p$. Infine, per ogni $\varepsilon > 0$ abbiamo

$$\mathbb{P}(|Z_n| > \varepsilon) = \mathbb{P}(Z_n > \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}(Z_n \neq 0) = \mathbb{P}(\tau > n) = p^n \,.$$

Quindi $\sum_n \mathbb{P}(|Z_n| > \varepsilon) < \infty$. Allora per il lemma di Borel Cantelli 1, si ha $\limsup |Z_n| \leqslant \varepsilon$ quasi certamente, per ogni $\varepsilon > 0$. Ne segue che $Z_n \to 0$ quasi certamente.

Soluzione Esercizio 4: Osserviamo che X_i soddisfa $\mathbb{E}X_i = \frac{2}{\lambda}$. Questo risultato si può ottenere calcolando direttamente (integrando per parti) l'integrale

$$\mathbb{E}X_i = \int_0^\infty t\, f(t)\, dt = \int_0^\infty \lambda^2 t^2\, e^{-\lambda t}\, dt \,,$$

oppure ricordando che X_i è distribuita come la somma di due v.a. esponenziali indipendenti di parametro λ. Quindi, se $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, per il teorema del limite centrale si ha che $Z_n := \frac{1}{\sqrt{\sigma^2\, n}}\,(S_n - \frac{2n}{\lambda})$, dove σ^2 è la varianza di X_i, converge in distribuzione a una $N(0,1)$. Allora

$$\mathbb{P}\left(X_1 + \cdots + X_n \geqslant \frac{2n}{\lambda}\right) = \mathbb{P}(Z_n \geqslant 0) \to \frac{1}{2} \,.$$

Soluzione Esercizio 6: Notiamo che dati $i, j \in S$, $i \neq j$, esiste un $n = n_{i,j}$ tale che $P^n(i,j) > 0$. Infatti, se $i \geqslant 0$ e $j > i > 0$ si ha $P^{j-i}(i,j) \geqslant (1-p)^{j-i}$. Inoltre se $i < 0$ e $j > 0$ si ha $P^{i+j}(i,j) \geqslant P^i(i,0)P^j(0,j) \geqslant p^i(1-p)^j$. In questo modo si possono ottenere tutti gli altri casi. Dunque la catena è irriducibile. Inoltre, poiché per esempio $P(N,N) > 0$ la catena è anche regolare (vedi lemma trattato a lezione).

Poiché la catena è regolare abbiamo un'unica misura invariante. La misura ν descritta nel testo è reversibile. Infatti soddisfa le relazioni

$$\nu(i)P(i,j) = \nu(j)P(j,i)\,, \quad i,j \in S\,,$$

come si ottiene facilmente da una verifica diretta. Ogni misura reversibile è necessariamente invariante e dunque ν è l'unica misura reversibile.

Infine, per il teorema ergodico sappiamo che per qualunque distribuzione iniziale μ abbiamo $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = i) = \nu(i)$, per ogni $i \in S$. Dunque

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = \nu(0) = c = \frac{1}{1 + 2\sum_{i=1}^N \lambda^i} \,.$$

Per la soluzione degli altri esercizi si rimanda agli appunti del corso