CP2 – Esame

6 giugno 2007

Esercizio 1. *Per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *sia* X_n *una v.a. a valori in* $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ *tale che*

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{n^k}{k!}\, e^{-n}\,, \quad k \in \mathbb{Z}_+\,.$$

Dimostrare che $\frac{1}{n}X_n \to 1$ *quasi certamente.*

Esercizio 2. *Sia* $\{Y_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ *la passeggiata aleatoria semplice e simmetrica su* $\mathbb{Z}$*, con* $Y_0 = 0$*. Siano inoltre* $\{\varepsilon_k, k \in \mathbb{N}\}$ *variabili aleatorie indipendenti tali che* $\varepsilon_k = 1$ *con prob.* a_k*,* $\varepsilon_k = -1$ *con prob.* b_k *e* $\varepsilon_k = 0$ *con prob.* $1 - (a_k + b_k)$*, per assegnate successioni* $\{a_k\}, \{b_k\}$ *non–negative tali che* $a_k \geqslant b_k$ *e* $a_k + b_k \in [0, 1]$ *per ogni* $k \in \mathbb{N}$*. Sia infine*

$$Z_n = Y_n + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

con $Z_0 = 0$*.*

(1) Dimostrare che $M_n := Z_n - \sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k)$*, con* $M_0 = 0$*, è una martingala rispetto alla filtrazione naturale* $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \dots, Z_n)$*.*

(2) Sia $\tau_m := \inf\{n \geqslant 1 : \ |Z_n| \geqslant m\}$*, per un dato* $m \in \mathbb{N}$*. Mostrare che* τ_m *è tempo di arresto rispetto a* $\mathcal{F}_n$ *e che* $\mathbb{E}[\tau_m] < \infty$*.*

(3) Mostrare che

$$\mathbb{E}[Z_{\tau_m}] = \mathbb{E}\left\{\sum_{k=1}^{\tau_m}(a_k - b_k)\right\}\,.$$

Esercizio 3. *Si consideri il processo* Z_n *definito nell'esercizio precedente, nel caso in cui* $a_k = b_k = \frac{1}{k}$*. Dimostrare che*

(1) $\frac{1}{n}\, Z_n \to 0$ *quasi certamente.*

(2) $\frac{1}{\sqrt{n}}\, Z_n$ *converge in distribuzione alla variabile normale* $N(0, 1)$*.*

Esercizio 4. *Enunciare il teorema del limite centrale e dare cenni di dimostrazione.*

Esercizio 5. *Sia* Y_n *una successione di v.a. indipendenti ciascuna con distribuzione geometrica di parametro* p_n*, tale che* $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$*. Mostrare che* $p_n Y_n$ *converge in distribuzione per* $n \to \infty$ *e descriverne il limite. E' necessaria l'ipotesi di indipendenza ?*

Soluzioni

Soluzione Esercizio 1: Ricordiamo che la X_n è una v.a. di Poisson di parametro n. Quindi si puo' realizzare come somma di n v.a. di Poisson di parametro 1, ciascuna con media 1. Allora la tesi segue dalla legge forte dei grandi numeri (per es. la condizione sul momento quarto è certamente soddisfatta da una v.a. di Poisson di parametro 1).

Soluzione Esercizio 2: Abbiamo

$$\mathbb{E}[Z_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n] = Z_n + \mathbb{E}[Y_{n+1} - Y_n\,|\,\mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[\varepsilon_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n] = Z_n + (a_{n+1} - b_{n+1})\,.$$

Ne segue che M_n è una martingala. Che τ_m è tempo di arresto segue dagli argomenti di misurabilità usuali. Che $\mathbb{E}[\tau_m] < \infty$ segue per esempio dal fatto che τ_m è minore o uguale del primo tempo in cui si hanno $2m$ indici consecutivi j tali che $Z_{j+1} - Z_j \geqslant 1$. A ogni passo si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_{j+1} - Z_j \geqslant 1) &= \mathbb{P}(Y_{j+1} - Y_j = +1,\, \varepsilon_{j+1} \in \{0,1\}) \\ &= \mathbb{P}(Y_{j+1} - Y_j = +1)\mathbb{P}(\varepsilon_{j+1} \in \{0,1\}) = \frac{1}{2}(1 - b_k) \geqslant \frac{1}{4}\,.\end{aligned}$$

Quindi τ è minore o uguale di $2m\sigma$ dove σ è una geometrica di parametro $p_m \geqslant \frac{1}{4^{2m}}$. Allora $\mathbb{E}[\tau_m] \leqslant 2m\mathbb{E}[\sigma] \leqslant 2m4^{2m} < \infty$.

Poiché M_n ha incrementi limitati possiamo applicare il Teorema di optional stopping per ottenere $\mathbb{E}[M_{\tau_m}] = M_0 = 0$, da cui segue la formula nel testo dell'esercizio.

Soluzione Esercizio 3: Nel caso $a_k = b_k = \frac{1}{k}$ abbiamo che Z_n è una somma di v.a. indipendenti di media zero. Tuttavia non sono identicamente distribuite. Sappiamo che $\frac{1}{n}Y_n \to 0$, q.c. per la legge forte dei grandi numeri. Per il primo punto dobbiamo quindi mostrare che $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \to 0$, q.c. per $n \to \infty$. A tal fine osserviamo che, per ogni $\delta > 0$ fissato, usando la disuguaglianza di Chebyshev e l'indipendenza delle ε_k:

$$\mathbb{P}\left(|\sum_{k=1}^n \varepsilon_k| \geqslant \delta\, n\right) \leqslant \frac{1}{\delta^2\, n^2}\mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^n \varepsilon_k\right) = \frac{1}{\delta^2\, n^2}\sum_{k=1}^n \mathrm{Var}(\varepsilon_k)\,. \tag{0.1}$$

Ora, $\mathrm{Var}(\varepsilon_k) = \frac{2}{k}$. Dunque $\sum_{k=1}^n \mathrm{Var}(\varepsilon_k) = O(\log n)$. Quindi per ogni $\delta > 0$ troviamo una costante $C < \infty$ tale che

$$\sum_n \mathbb{P}\left(|\sum_{k=1}^n \varepsilon_k| \geqslant \delta\, n\right) \leqslant C\sum_n \frac{\log n}{n^2} < \infty\,.$$

Allora, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \to 0$, q.c., segue dal lemma di Borel–Cantelli I.

Per il secondo punto utilizziamo un argomento simile. Sappiamo dal teorema del limite centrale che $\frac{1}{\sqrt{n}}Y_n \to N(0,1)$ in distribuzione. Per un noto teorema basta allora dimostrare che $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \to 0$, in probabilità. Adattando la stima (0.1) a questo caso otteniamo, per ogni $\delta > 0$:

$$\mathbb{P}\left(|\sum_{k=1}^n \varepsilon_k| \geqslant \delta\sqrt{n}\right) \leqslant \frac{1}{\delta^2\, n}\sum_{k=1}^n \mathrm{Var}(\varepsilon_k)\,. \tag{0.2}$$

Essendo $\sum_{k=1}^n \mathrm{Var}(\varepsilon_k) = O(\log n)$ otteniamo che la probabilità nella (0.2) tende a zero per ogni $\delta > 0$, il che equivale a dire che $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \to 0$, in probabilità.

Soluzione Esercizio 5: E' noto (si veda per esempio la raccolta di esercizi per la soluzione) che se Y_n è una geometrica di parametro p_n allora $p_n Y_n$ converge in distribuzione, per $p_n \to 0$ a una v.a. esponenziale di parametro 1. Come si vede facilmente dalla prova (tramite funzioni caratteristiche) non è necessario assumere indipendenza.