Esercizi CP2 per Primo Esonero
Pietro Caputo
3 novembre 2006

Esercizio 1. *Siano* $X_1, X_2, \ldots$ *variabili di Bernoulli (p) indipendenti,* $p \in (0,1)$.
1) Mostrare che $\frac{1}{n}\sum_{i \leqslant n} X_i \to p$, $\mathbb{P}$*–q.c.*
2) Mostrare che $\frac{1}{n}\sum_{i \leqslant n}(X_i - p)^2 \to p(1-p)$, $\mathbb{P}$*–q.c.*

Esercizio 2. *Siano* $X_1, X_2, \ldots$ *variabili di Bernoulli (p) indipendenti,* $p \in (0,1)$. *Mostrare che per* $\alpha > \frac{1}{2}$ *si ha*

$$\frac{1}{n^\alpha}\sum_{i \leqslant n}(X_i - p) \to 0\,, \quad \mathbb{P} - q.c.\,.$$

Esercizio 3. *Sia* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un dato spazio di probabilità. Sia* $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ *una sotto* σ*–algebra* finita.
1) Dimostrare che esistono insiemi $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ *tali che*

- $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset\,,$
- $\Omega = \cup_{i=1}^n \Omega_i\,,$
- *Per ogni* $G \in \mathcal{G}$, *esitsono* $i_1, \ldots, i_m$ *tali che* $G = \cup_{k=1}^m \Omega_{i_k}\,.$

2) Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *una funzione* $\mathcal{G}$*–misurabile. Mostrare che* f *è costante su ciascuno degli insiemi* Ω_i.

Esercizio 4. *Siano* X_1 *e* X_2 *v.a. indipendenti con* X_i *variabile di Poisson di parametro* $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2$. *Sia* $X = X_1$ *e* $Z = X_1 + X_2$. *Calcolare l'aspettazione condizionata* $\mathbb{E}[X \mid Z]$.

Esercizio 5. *Siano* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *v.a. indipendenti tali che*

$$X_n = \begin{cases} \frac{1}{n^\alpha} & \textit{con prob. } 1 - \frac{1}{n^\alpha} \\ 1 & \textit{con prob. } \frac{1}{n^\alpha} \end{cases} \tag{0.1}$$

per qualche $\alpha > 0$. *Mostrare che:*
1) $\mathbb{E}X_n \to 0\,,\ n \to \infty$, *per ogni* $\alpha > 0$.
2) $X_n \to 0\,,\ n \to \infty$, $\mathbb{P}$*–q.c., per ogni* $\alpha > 1$.
3) $\limsup_{n\to\infty} X_n = 1\,,$ $\mathbb{P}$*–q.c., per ogni* $\alpha \in (0,1]$.

Esercizio 6. *Siano* $\{Z_n\}$ *v.a. indipendenti a valori in* $\mathbb{R}^2$ *ciascuna con distribuzione uniforme sul cerchio* $\mathcal{C} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. *Sia* $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di v.a. indipendenti con*

$$Y_n = \begin{cases} 1 & \textit{con prob. } p_n \\ 0 & \textit{con prob. } 1 - p_n \end{cases}$$

dove $p_n \to 0$, $n \to \infty$. *Assumendo che le* Y_n *siano indipendenti dalle* Z_n *e ponendo* $X_n := Z_n Y_n$, *mostrare che*
1) Se $\sum_n p_n < \infty$ *allora* $X_n \to 0$, $\mathbb{P}$*–q.c.*
2) Se $\sum_n p_n = \infty$ *allora* $\limsup_{n\to\infty} |X_n| = 1$, $\mathbb{P}$*–q.c.*
3) Cosa cambia se il cerchio $\mathcal{C}$ *è di raggio* $R > 0$, *con* $R \neq 1$ *?*

Esercizio 7. *Siano* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *v.a. indipendenti identicamente distribuite con* $X_n \geqslant 0$ *e*

$$\mathbb{P}(X_n > t) = e^{-t^\beta}\,, \quad t \geqslant 0\,,$$

per un certo $\beta > 0$*, ossia le* X_n *hanno la distribuzione di Weibull di parametro* β*. Trovare i valori di* $\alpha > 0$ *tali che:*

1) $\mathbb{P}(X_n > (\alpha \log n)^{\frac{1}{\beta}} \text{ i.o. }) = 0$

2) $\mathbb{P}(X_n > (\alpha \log n)^{\frac{1}{\beta}} \text{ i.o. }) = 1$

Esercizio 8. *Siano* $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *i.i.d. tali che*

$$Y_n = \begin{cases} 1 & \textit{con prob. } \frac{1}{2} \\ -1 & \textit{con prob. } \frac{1}{2} \end{cases} \tag{0.2}$$

Sia X_n *definita da:* $X_0 = 0\,,\ X_{n+1} = X_n + Y_{n+1}$*,* $n \in \mathbb{N}$*. Mostrare che*

1) $\limsup_{n\to\infty} X_n = +\infty\,,\ \mathbb{P} - \text{q.c.}$

2) $\liminf_{n\to\infty} X_n = -\infty\,,\ \mathbb{P} - \text{q.c.}$

3) $\mathbb{P}\,[X_n = 0\,,\ \text{i.o.}] = 1$

Esercizio 9. *Siano* $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *v.a. indipendenti tali che*

$$Y_n = \begin{cases} 0 & \textit{con prob. } \varepsilon_n \\ 1 & \textit{con prob. } 1 - \varepsilon_n \end{cases} \tag{0.3}$$

dove $\varepsilon_n \in (0,1)$ *e* $\varepsilon_n \to 0$*,* $n \to \infty$*. Sia*

$$Z_n = \prod_{k=1}^{n} Y_k\,.$$

Mostrare che $\mathbb{P}[\lim_{n\to\infty} Z_n = 0] < 1$ *se e solo se*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \infty\,.$$

Soluzione Esercizio 1: 1) Sia $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$, con $Y_k := X_k - p$. Allora, poiché $|Y_k| \leqslant 1$ si ha, per ogni n:

$$\mathbb{E}(S_n^4) \leqslant 3\, n^2\,.$$

Quindi se $E_n = \{|S_n| > \varepsilon\, n\}$, tramite la disuguaglianza di Markov si ottiene

$$\mathbb{P}(E_n) \leqslant \frac{3}{\varepsilon^4\, n^2}\,.$$

Essendo $\sum_n \mathbb{P}(E_n) < \infty$ il primo Lemma di Borel–Cantelli implica che $\limsup E_n$ ha probabilità 0. Ne segue che $\frac{1}{n} S_n \to 0$ quasi certamente.

Per il punto 2) si ripete esattamente il ragionamento esposto sopra ma questa volta si usa $Y_k := (X_k - p)^2 - p(1-p)$.

Soluzione Esercizio 2: Sia $\Lambda(\lambda) := \log \mathbb{E}[e^{\lambda Y_n}]$, con $Y_n := X_n - p$. Sia $S_n = \sum_{i \leqslant n} Y_i$. Grazie all'indipendenza delle Y_n si ha

$$\mathbb{E}[e^{\lambda S_n}] = \prod_{i \leqslant n} \mathbb{E}[e^{\lambda Y_i}] = e^{n\,\Lambda(\lambda)}\,.$$

Tramite la disuguaglianza di Markov, per ogni $\lambda > 0$ si ha

$$\mathbb{P}[S_n \geqslant \varepsilon\, n^\alpha] = \mathbb{P}[e^{\lambda S_n} \geqslant e^{\lambda\, \varepsilon\, n^\alpha}] \leqslant e^{-\lambda\,\varepsilon\, n^\alpha}\, \mathbb{E}[e^{\lambda S_n}] = e^{-\lambda\,\varepsilon\, n^\alpha}\, e^{n\,\Lambda(\lambda)}\,. \tag{0.4}$$

Osserviamo che $\Lambda(\lambda) = \log[pe^{\lambda(1-p)} + (1-p)e^{-\lambda p}]$. Si ha $\Lambda(0) = 0$. La disuguaglianza di Jensen applicata alla funzione esponenziale mostra che $\Lambda(\lambda) \geqslant 0$. La derivata prima in zero soddisfa $\Lambda'(0) = \mathbb{E}Y_n = 0$ mentre la derivata seconda in zero vale

$$\Lambda''(0) = \mathrm{Var} Y_n = p(1-p)\,.$$

Inoltre si vede facilmente che $\Lambda''(\lambda)$ è uniformemente limitata intorno al punto $\lambda = 0$. Ne segue in particolare, facendo uno sviluppo al secondo ordine intorno a $\lambda = 0$, che $\Lambda(\lambda) \leqslant C\,\lambda^2$, per una costante finita C, per tutti i valori di λ abbastanza piccoli. Dalla (0.4) possiamo allora concludere che se $\lambda = n^{-\frac{1}{2}}$ si ha

$$\mathbb{P}[S_n \geqslant \varepsilon\, n^\alpha] \leqslant e^{-\varepsilon\, n^{\alpha - \frac{1}{2}}}\, e^C\,.$$

Se $\alpha > \frac{1}{2}$ allora $\sum_n \mathbb{P}[S_n \geqslant \varepsilon\, n^\alpha] < \infty$ e le usuali considerazioni mostrano che $\limsup n^{-\alpha} S_n \leqslant 0$ q.c. Ripetendo lo stesso argomento per $-S_n$ al posto di S_n si ottiene $\sum_n \mathbb{P}[S_n \leqslant -\,\varepsilon\, n^\alpha] < \infty$ per ogni $\varepsilon > 0$ e dunque $\liminf n^{-\alpha} S_n \geqslant 0$ q.c. Ne segue che $\lim n^{-\alpha} S_n = 0$ q.c.

Soluzione Esercizio 3: Sia $\mathcal{G} = \{G_1, \dots, G_n\}$. Per ogni i definiamo

$$G_i^1 = G_i\,, \quad G_i^0 = \Omega \setminus G_i\,.$$

Sia ora $v = (v_1, \dots, v_n)$, $v_i \in \{0, 1\}$. Poniamo

$$G^v = \cap_{i=1}^n G_i^{v(i)}\,.$$

Osserviamo che $G^v \cap G^{v'} = \emptyset$, se $v \neq v'$. Infatti $v \neq v'$ significa $v_j \neq v'_j$ per qualche j. Quindi se per esempio $v_j = 1$ e $v'_j = 0$ si ha $G^v \subset G_j$ mentre $G^{v'} \subset G_j^c$.

Inoltre ogni G_k si puo' ottenere come unione di G^v al variare di $v \in \{0, 1\}^n$. Per esempio G_1 si ottiene facendo l'unione di G^v al variare di v tali che $v_1 = 1$.

Basta quindi mostrare che $\Omega = \cup_v G^v$. Sia $\omega \in \Omega$. Allora per ogni j si ha $\omega \in G_j$ oppure $\omega \in G_j^c$. Ne segue che per ogni $\omega \in \Omega$ esiste un $v \in \{0, 1\}^n$ tale che $\omega \in G_v$. Questo conclude la dimostrazione del punto 1.

Sia f una funzione $\mathcal{G}$–misurabile. Quindi

$$\sigma(f) = \{f^{-1}(B)\,,\ B \text{ boreliano}\} \subset \mathcal{G}$$

Notiamo che f assume un numero finito di valori (altrimenti $\sigma(f)$ non potrebbe essere finita). Siano $\{x_1, \dots, x_n\}$ i valori assunti da f. Notiamo che il numero di valori distinti non puo' superare il numero di insiemi distinti di $\mathcal{G}$. Quindi se $U_i = f^{-1}(x_i)$, si ha $U_i \in \mathcal{G}$ e per il punto precedente si puo' scrivere U_i come unione $\cup_{v \in I_i} G^v$, per qualche insieme di indici I_i. Allora $f(\omega) = x_i$ per ogni $\omega \in G^v$, $v \in I_i$. Ne segue che f non puo' che assumere un unico valore su ciascuno degli elementi G^v.

Soluzione Esercizio 4: Si ha $\mathbb{P}(X_i = k) = e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^k}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Quindi

$$\mathbb{P}(Z = n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}(X_2 = n-k) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!} \,,$$

ovvero la somma di Poisson indipendenti è Poisson con parametro dato dalla somma dei parametri. Quindi se $k \leqslant n$ si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X = k \,|\, Z = n] &= \frac{\mathbb{P}[X_1 = k\,,\ X_2 = n-k]}{\mathbb{P}(Z = n)} \\ &= \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{n-k} \,, \end{aligned}$$

ovvero la distribuzione di X_1 condizionata al valore della somma $X_1 + X_2 = n$ è binomiale con parametri n e $p = \lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$. Ne segue che il valore aspettato di X condizionato a $Z = n$ vale np. Quindi la v.a. $\mathbb{E}[X \,|\, Z]$ vale

$$\mathbb{E}[X \,|\, Z] = Z \, \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \,.$$

Soluzione Esercizio 5: Osserviamo che

$$\mathbb{E}X_n = n^{-\alpha} + n^{-\alpha}(1 - n^{-\alpha}) .$$

Quindi $\mathbb{E}X_n \to 0$, se $\alpha > 0$.

Se $\alpha > 1$ si ha

$$\sum_n \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) < \infty$$

per ogni $\varepsilon > 0$. Infatti, se $n^{-\alpha} < \varepsilon$ (cioè se n è abbastanza grande) $|X_n| > \varepsilon$ è equivalente a $X_n = 1$ e quindi ha probabilità $n^{-\alpha}$ che è sommabile per $\alpha > 1$. Dal primo lemma di Borel–Cantelli segue che $X_n \to 0$ q.c.

Se $\alpha \in (0, 1]$ abbiamo

$$\sum_n \mathbb{P}(X_n = 1) = \sum_n n^{-\alpha} = +\infty .$$

Dal secondo lemma di Borel–Cantelli segue che con probabilità 1 si ha $X_n = 1$ infinite volte. Segue che $\limsup X_n = 1$ q.c.

Soluzione Esercizio 6: 1) Osserviamo che $|Z_n| \leqslant 1$ quindi $|X_n| \leqslant Y_n$. In particolare, se $Y_n \to 0$ q.c. si ha anche $X_n \to 0$ q.c.

Se $\sum_n p_n < \infty$ allora per il primo lemma di Borel–Cantelli si ha $Y_n = 0$ quasi certamente da un certo n in poi. Quindi $X_n \to 0$ quasi certamente.

2) Sia $\delta > 0$ fissato e sia $\nu_n := \mathbb{P}(|X_n| \geqslant 1 - \delta)$. Si ha

$$\nu_n = \mathbb{P}(|Z_n| \geqslant 1 - \delta\,,\ Y_n = 1) = p_n\, \mathbb{P}(|Z_n| \geqslant 1 - \delta)\,.$$

Poiché l'area del cerchio di raggio $1 - \delta$ è $\pi(1-\delta)^2$ per la v.a. uniforme sul cerchio di raggio 1 (che ha area totale uguale a π) si ha

$$\mathbb{P}(|Z_n| \geqslant 1 - \delta) = \frac{\pi - \pi(1-\delta)^2}{\pi} = 2\delta - \delta^2\,.$$

In conclusione abbiamo

$$\nu_n = p_n\,(2\delta - \delta^2)\,.$$

Quindi $\sum_n \nu_n = +\infty$ se $\sum_n p_n = +\infty$. Allora per il secondo lemma di Borel–Cantelli si ha $|X_n| \geqslant 1 - \delta$ infinite volte, quasi certamente. Allora $\limsup |X_n| \geqslant 1 - \delta$, $\mathbb{P}$–q.c. Poiché δ è arbitrariamente piccolo, le usuali considerazioni che sfruttano la numerabilità implicano che $\limsup |X_n| \geqslant 1$ q.c. Essendo inoltre $|X_n| \leqslant 1$ sempre abbiamo dimostrato che

$$\limsup |X_n| = 1\,, \quad \mathbb{P} - q.c.$$

nel caso in cui $\sum_n p_n = +\infty$.

3) Se il raggio del cerchio è arbitrario non cambia nulla, tranne che ora, nel caso in cui $\sum_n p_n = +\infty$ si ottiene $\limsup |X_n| = R\,, \quad \mathbb{P}$–q.c.

Soluzione Esercizio 7: Ripetendo l'argomento usuale (vedi Williams, pag. 41, per il caso $\beta = 1$) si ha

$$\mathbb{P}(X_n > (\alpha \log n)^{\frac{1}{\beta}} \text{ i.o.}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 1 \\ 1 & \text{se } \alpha \leqslant 1 \end{cases}$$

Soluzione Esercizio 8: L'evento $A = \{\limsup_{n\to\infty} X_n = +\infty\}$ è un evento coda e per la legge 0/1 di Kolmogorov si ha $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$. Allora basta mostrare che $\mathbb{P}(A) > 0$.

Per $t \in \mathbb{R}$ sia $E_{n,t}$ l'evento $\{X_n \geqslant t\}$. Per il teorema del limite centrale sappiamo che $X_n/\sqrt{n}$ approssima un normale standard nel senso che per ogni $s \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_{n,s\sqrt{n}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_s^\infty e^{-x^2/2} dx$$

Per ogni $t, \epsilon > 0$ fissati si ha $E_{n,\epsilon\sqrt{n}} \subset E_{n,t} \subset E_{n,0}$, se n è abbastanza grande. Allora

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\epsilon^\infty e^{-x^2/2} dx \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_{n,t}) \leqslant \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_{n,t}) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{2}.$$

Poiché $\epsilon > 0$ è arbitrariamente piccolo ne segue che

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_{n,t}) = \frac{1}{2},$$

per ogni $t > 0$ fissato.

Ora notiamo che

$$A = \bigcap_{k=1}^\infty \bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{j \geqslant n} E_{j,k}.$$

Allora

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\cup_{j \geqslant n} E_{j,k}) \geqslant \lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_{n,k}) = \frac{1}{2}.$$

Abbiamo mostrato che $\limsup_{n\to\infty} X_n = +\infty$ quasi certamente. Allo stesso modo si mostra che $\liminf_{n\to\infty} X_n = -\infty$, per esempio usando la simmetria della X_n e il fatto che

$$\liminf_{n\to\infty} X_n = -\limsup_{n\to\infty} (-X_n).$$

Infine il punto 3) segue dal fatto che - per i punti 1) e 2) - si ha infinite volte $X_n > M$, $X_n < -M$, con $M > 0$ fissato, e dal fatto che X_n ha incrementi di ± 1 e pertanto se $X_i > M$ e $X_{i+k} < -M$, si deve avere $X_j = 0$ per qualche $i < j < i + k$.

Soluzione Esercizio 9: Abbiamo che Z_n vale 0 o 1, con $Z_n = 1$ se e solo se $Y_k = 1$, $k = 1, \dots, n$. Quindi

$$\mathbb{P}(Z_n = 1) = (1 - \varepsilon_1) \cdots (1 - \varepsilon_n) \tag{0.5}$$

Gli argomenti di monotonia usuali mostrano che

$$\mathbb{P}[\lim_{n\to\infty} Z_n = 0] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[Z_n = 0] \,.$$

Dalla (0.5) abbiamo che $\pi := \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[Z_n = 0]$ soddisfa $\pi < 1$ se e solo se

$$\lim_{n\to\infty} (1-\varepsilon_1)\cdots(1-\varepsilon_n) > 0\,. \tag{0.6}$$

Passando ai logaritmi si ha che (0.6) è equivalente a

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \log(1-\varepsilon_k) > -\infty\,. \tag{0.7}$$

Usando le disuguaglianze elementari

$$-2x \leqslant \log(1-x) \leqslant -\frac{1}{2}x \qquad x \in [0, \frac{1}{2}]\,,$$

vediamo che la (0.7) è equivalente a $\sum_k \varepsilon_k < \infty$.