Esercizi 2

Pietro Caputo

14 dicembre 2006

Esercizio 1. *Siano Y_n, per $n = 1, 2, \dots,$ variabili aleatorie con distribuzione binomiale di parametri n e $p_n := \frac{\lambda}{n}$, per qualche $\lambda > 0$. Dimostrare che Y_n converge in distribuzione alla variabile di Poisson di parametro λ.*

Esercizio 2. *Siano $Y_{n,k}$, per $n, k = 1, 2, \dots,$ variabili aleatorie indipendenti con distribuzione binomiale di parametri n e $p_{n,k} := \frac{1}{n\, 2^k}$. Dimostrare che la variabile aleatoria $Z_n := \sum_{k=1}^n Y_{n,k}$ converge in distribuzione alla variabile di Poisson di parametro $\lambda = 1$.*

Esercizio 3. *Sia $\{Z_n\}$ una successione di v.a. tale che Z_n converge in distribuzione a una v.a. X. Sia inoltre $\{Y_n\}$ una successione di v.a. indipendente da $\{Z_n\}$ e tale che per ogni n, $Y_n = \pm 1$ con probabilità p_n e $1 - p_n$. Assumendo che $p_n \to \frac{1}{2}$, $n \to \infty$, dimostrare che il prodotto $X_n := Y_n Z_n$ converge in distribuzione e descrivere la v.a. limite.*

Esercizio 4. *Siano $\{\xi_n\,,\ n \in \mathbb{N}\}$ variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione esponenziale di parametro $\lambda > 0$. Sia η_n la successione definita da*

$$\eta_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & se\ \xi_n \leqslant logn \\ 1 & se\ \xi_n > \log n \end{cases} \tag{0.1}$$

Dimostrare che

- *η_n converge in probabilità per ogni $\lambda > 0$.*
- *η_n converge quasi certamente se e solo se $\lambda > 1$.*
- *Se $\lambda = 1$, allora η_{n^2} converge quasi certamente.*
- *Come si modificano le affermazioni precedenti se le ξ_n sono i.i.d. con distribuzione geometrica di parametro $p \in (0, 1)$.*

Esercizio 5. *Sia ξ_n una successione di v.a. geometriche con parametro $p_n := 1/n$. Dire se la successione $\frac{\xi_n}{n}$ converge in distribuzione.*

Esercizio 6. *Sia X_n una v.a. uniforme su $\{0, 1, 2, \dots, n\}$. Dimostrare che la successione $\frac{X_n}{n}$ converge in distribuzione e descrivere il limite. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, dimostrare che la v.a. $f(X_n)$ converge in distribuzione.*

Soluzione Esercizio 1:

Se Y è v.a. binomiale di parametri n e p allora possiamo rappresentare Y come somma di n bernoulliane X_i di parametro p indipendenti. Quindi la funzione caratteristica è data da

$$\varphi_Y(\theta) = \mathbb{E}[e^{i\theta Y}] = (\mathbb{E}[e^{i\theta X_1}])^n = \big((1-p) + pe^{i\theta}\big)^n \,.$$

In particolare, se Y_n è binomiale di parametri n e $p_n := \lambda/n$ allora si ha, per ogni $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\varphi_{Y_n}(\theta) = \left(1 + \frac{\lambda(e^{i\theta}-1)}{n}\right)^n \,. \tag{0.2}$$

Ricordiamo ora che

$$|\log(1+z) - z| \leqslant |z|^2 \,, \quad |z| \leqslant \frac{1}{2} \,. \tag{0.3}$$

Poiché $|e^{i\theta}-1| \leqslant |\theta|$, si ha $\frac{\lambda(e^{i\theta}-1)}{n} \leqslant \frac{1}{2}$ non appena $n \geqslant n_0(\theta)$ dove $n_0(\theta)$ è un intero fissato una volta fissato $\theta \in \mathbb{R}$ ($\lambda > 0$ è fissato dall'inizio). Quindi grazie alla (0.3), dalla (0.2) otteniamo, per ogni $\theta \in \mathbb{R}$

$$|\log \varphi_{Y_n}(\theta) - \lambda(e^{i\theta}-1)| \leqslant \frac{\lambda^2|\theta|^2}{n} \,,$$

per tutti gli $n \geqslant n_0(\theta)$. Ne segue che

$$\lim_{n\to\infty} \log \varphi_{Y_n}(\theta) = \lambda(e^{i\theta}-1) \,,$$

e quindi anche

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{Y_n}(\theta) = e^{\lambda(e^{i\theta}-1)} \,.$$

Riconosciamo a destra la funzione caratteristica della v.a. di Poisson W_λ di parametro λ. Questo dimostra, grazie al noto teorema sull'equivalenza tra convergenza in distribuzione e convergenza puntuale delle funzioni caratteristiche, che Y_n converge in distribuzione a W_λ.

Soluzione Esercizio 2:

Sia $Y_{n,k}$ come nel testo. Ponendo $\lambda = 2^{-k}$ nell'equazione (0.2) si ha

$$\varphi_{Y_{n,k}}(\theta) = \left(1 + \frac{2^{-k}(e^{i\theta}-1)}{n}\right)^n$$

Se $Z_n = \sum_{k=1}^n Y_{n,k}$, per l'indipendenza si ha

$$\varphi_{Z_n}(\theta) = \prod_{k=1}^n \varphi_{Y_{n,k}}(\theta) = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{2^{-k}(e^{i\theta}-1)}{n}\right)^n$$

Poniamo $\alpha_k(\theta) := 2^{-k}(e^{i\theta}-1)$ e passiamo al logaritmo di $\varphi_{Z_n}(\theta)$:

$$\log \varphi_{Z_n}(\theta) = \sum_{k=1}^n n \, \log\left(1 + \frac{\alpha_k(\theta)}{n}\right) \,.$$

Poiché $|\alpha_k(\theta)| = 2^{-k}|e^{i\theta}-1| \leqslant 2^{-k}|\theta|$ si ha $|\frac{\alpha_k(\theta)}{n}| \leqslant \frac{1}{2}$ per n abbastanza grande, cioè per $n \geqslant n_0(\theta)$ per qualche intero $n_0(\theta)$ dipendente da θ. Per $\theta \in \mathbb{R}$ fissato e per $n \geqslant n_0(\theta)$, grazie alla (0.3) allora abbiamo la stima

$$|\log \varphi_{Z_n}(\theta) - \sum_{k=1}^n \alpha_k(\theta)| \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{|\alpha_k(\theta)|^2}{n} \leqslant \frac{|\theta|^2}{3\,n},$$

dove abbiamo usato $|\alpha_k(\theta)| \leqslant 2^{-k}|\theta|$ e $\sum_{k=1}^n 2^{-2k} \leqslant \sum_{k=1}^\infty 2^{-2k} = \frac{1}{3}$. Poiché

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \alpha_k(\theta) = (e^{i\theta}-1)\sum_{k=1}^\infty 2^{-k} = (e^{i\theta}-1),$$

abbiamo

$$\begin{aligned} |\log \varphi_{Z_n}(\theta) - (e^{i\theta}-1)| &\leqslant |\log \varphi_{Z_n}(\theta) - \sum_{k=1}^n \alpha_k(\theta)| + |\sum_{k=1}^n \alpha_k(\theta) - (e^{i\theta}-1)| \\ &\leqslant \frac{|\theta|^2}{3\,n} + |\sum_{k=1}^n \alpha_k(\theta) - (e^{i\theta}-1)| \to 0\,. \end{aligned}$$

Questo dimostra che per ogni $\theta \in \mathbb{R}$ fissato si ha

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{Z_n}(\theta) = e^{e^{i\theta}-1},$$

il che implica che Z_n converge in distribuzione a una variabile di Poisson di parametro $\lambda = 1$.

Soluzione Esercizio 3:

Abbiamo

$$\varphi_{X_n}(\theta) = \mathbb{E}[e^{i\theta Y_n Z_n}] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[e^{i\theta Y_n Z_n} \mid Z_n]\right].$$

Grazie all'indipendenza possiamo calcolare

$$\mathbb{E}[e^{i\theta Y_n Z_n} \mid Z_n] = p_n\, e^{i\theta Z_n} + (1-p_n)\, e^{-i\theta Z_n}.$$

Ne segue che

$$\varphi_{X_n}(\theta) = p_n\, \varphi_{Z_n}(\theta) + (1-p_n)\, \varphi_{Z_n}(-\theta).$$

Sappiamo che $\varphi_{Z_n}(\theta) \to \varphi_X(\theta)$ per ogni $\theta \in \mathbb{R}$. Quindi poiché $p_n \to \frac{1}{2}$ si ha

$$\varphi_{X_n}(\theta) \to \frac{1}{2}\varphi_X(\theta) + \frac{1}{2}\varphi_X(-\theta).$$

Osserviamo che se Y è una v.a. indipendente da X che vale ± 1 con probabilità $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ e $\tilde{X} := YX$ allora $\varphi_{\tilde{X}} = \frac{1}{2}\varphi_X(\theta) + \frac{1}{2}\varphi_X(-\theta)$. Quanto visto dimostra che X_n converge a $\tilde{X}$ in distribuzione.

Soluzione Esercizio 4: Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Allora, se n è abbastanza grande ($n > \frac{1}{\varepsilon}$), l'evento $|\eta_n| > \varepsilon$ coincide con l'evento $|\xi_n| > \log n$. Quindi per ogni $n \geqslant n_0(\varepsilon)$

$$\mathbb{P}(|\eta_n| \geqslant \varepsilon) = \mathbb{P}(|\xi_n| > \log n) = e^{-\lambda \log n} = n^{-\lambda}. \tag{0.4}$$

Quindi, per ogni $\lambda > 0$ si ha $\mathbb{P}(|\eta_n| \geqslant \varepsilon) \to 0$, $n \to \infty$, per ogni $\varepsilon > 0$. Abbiamo mostrato la convergenza di η_n a 0 in probabilità, per ogni $\lambda > 0$.

Ricordiamo ora che, poiché η_n converge a 0 in probabilità, allora esiste una successione estratta $\{n_k\}$ tale che $\eta_{n_k} \to 0$, $\mathbb{P}$–q.c. (per esempio definiamo n_k come una successione tale che $\mathbb{P}(|\eta_{n_k}| > \frac{1}{k}) \leqslant 2^{-k}$ e usiamo Borel-Cantelli I per ottenere che $\eta_{n_k} \to 0$, $\mathbb{P}$–q.c.). In particolare se η_n converge quasi certamente si deve avere η_n convergente a 0. D'altra parte sappiamo dai due lemmi di Borel–Cantelli che $\eta_n \to 0$ q.c. se e solo se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|\eta_n| \geqslant \varepsilon) < \infty\,, \tag{0.5}$$

per ogni $\varepsilon > 0$. Infatti se vale la (0.5) allora quasi certamente $|\eta_n| \geqslant \varepsilon$ solo un numero finito di volte (B–C I) mentre se non vale (0.5) si ha quasi certamente $|\eta_n| \geqslant \varepsilon$ infinite volte (B–C II, notare che qui abbiamo usato l'ipotesi di indipendenza delle ξ_n). Ora, la (0.4) mostra che (0.5) è soddisfatta se e solo se $\lambda > 1$.

Se $\lambda = 1$ allora per quanto visto si ha che η_n non converge a 0 q.c. Tuttavia la (0.4) mostra che $\mathbb{P}(|\eta_{n^2}| \geqslant \varepsilon) = (n^2)^{-\lambda} = \frac{1}{n^2}$ e quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|\eta_{n^2}| \geqslant \varepsilon) < \infty\,. \tag{0.6}$$

Come discusso sopra la (0.6) implica che $\eta_{n^2} \to 0$, $\mathbb{P}$–q.c.

Nel caso di variabili ξ_n geometriche di parametro p la (0.4) diventa

$$\mathbb{P}(|\eta_n| \geqslant \varepsilon) = \mathbb{P}(|\xi_n| > \log n) = (1-p)^{[\log n]}\,, \tag{0.7}$$

dove $[\log n]$ è la parte intera di $\log n$. Ponendo $\lambda := -\log(1-p)$ si può verificare che tutte le affremazioni fatte sopra restano invariate.

Soluzione Esercizio 5:

Calcoliamo la funzione caratteristica di ξ_n. Per una v.a. geometrica ξ con parametro $p \in (0,1)$ si ha

$$\begin{aligned}\varphi_\xi(\theta) = \mathbb{E}e^{i\theta\xi} &= p\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}e^{ik\theta} = \frac{p}{1-p}\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^k e^{ik\theta} \\ &= \frac{p}{1-p}\,\frac{(1-p)e^{i\theta}}{1-(1-p)e^{i\theta}} = \frac{pe^{i\theta}}{1-(1-p)e^{i\theta}}\end{aligned}$$

Allora, ponendo $Z_n := \xi_n/n$ otteniamo

$$\varphi_{Z_n}(\theta) = \mathbb{E}e^{i\frac{\theta}{n}\xi_n} = \frac{\frac{1}{n}e^{i\frac{\theta}{n}}}{1-(1-\frac{1}{n})e^{i\frac{\theta}{n}}}$$

Osserviamo che $1-(1-\frac{1}{n})e^{i\frac{\theta}{n}} = \frac{1}{n}(1-i\theta) + o\left(\frac{1}{n}\right)$ e dunque, per ogni $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{Z_n}(\theta) = \frac{1}{1-i\theta}\,.$$

Riconosciamo a destra la funzione caratteristica della v.a. X con distribuzione esponenziale di parametro 1 e quindi deduciamo che Z_n converge in distribuzione a X.

Soluzione Esercizio 6:

Notiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha:

$$\varphi_{\frac{1}{n}X_n}(\theta) = \mathbb{E}e^{i\theta X_n} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} e^{i\frac{k}{n}\theta}.$$

E' ben noto che tali somme approssimano un'integrale (ricordare definizione dell'integrale di Riemann):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} e^{i\theta\frac{k}{n}} = \int_0^1 e^{i\theta x}\,dx$$

A destra abbiamo la funzione caratteristica della v.a. U uniforme in $[0,1]$, dunque abbiamo ottenuto che $\frac{1}{n}X_n \to U$ in distribuzione.

In generale, se f è una funzione continua da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ e Z_n una successione di v.a. convergente in ditribuzione a Z allora $f(Z_n) \to f(Z)$ in distribuzione (verificare che $\mathbb{E}[h(f(Z_n))] \to \mathbb{E}[h(f(Z))]$ per ogni funzione continua e limitata h).