Esonero II
20 dicembre 2006

Esercizio 1. *Sia* $\{X_n\}$ *una successione di v.a. che converge in distribuzione a una v.a.* X *e sia* $\{Y_n\}$ *una successione che converge a* 0 *in probabilità.*

(1) Dimostrare che la successione di v.a. $X_n + Y_n$ *converge in distribuzione a* X.

(2) Sia $h(t) = \frac{1}{1+t^2}$, $t \in \mathbb{R}$. *Dimostrare che la successione di v.a.* $h(X_n + Y_n)$ *converge in distribuzione alla v.a.* $h(X)$.

Esercizio 2. *Siano* $\{X_k\}$ *v.a. i.i.d. con media* $\mu \in \mathbb{R}$ *e varianza* $\sigma^2 > 0$. *Per ogni* k *poniamo* $Y_k := X_k + \frac{1}{2^k}$, *e definiamo* $S_n := \sum_{k=1}^n Y_k$. *Dimostrare che il limite*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left| \frac{S_n}{n} - \mu \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \right)$$

esiste ed è positivo per ogni $\varepsilon > 0$.

Esercizio 3. *Sia* W_p *una v.a. geometrica di parametro* $p \in (0,1)$. *Dimostrare che* pW_p *converge in distribuzione nel limite* $p \to 0$ *e descrivere la v.a. limite.*

Esercizio 4. *Teorema di Doob sullo "optional stopping": illustrare l'enunciato con uno o piu' esempi e dare una dimostrazione.*

Esercizio 5. *Sia* $\{X_n\}$ *il processo definito da* $X_0 := 0$ *e* $X_n := \sum_{j=1}^n Z_j$, *dove* $\{Z_j\}$ *sono v.a. indipendenti tali che* $Z_j = 1$ *con probabilità* p *e* $Z_j = 0$ *con probabilità* $1-p$, *per un certo* $p \in (0,1)$ *assegnato. Per* $k \in \mathbb{N}$ *definiamo*

$$\tau_k := \inf\{n \geqslant 1 \;:\; X_n = k\}\,.$$

Calcolare $\mathbb{E}\tau_k$ *e* $\mathbb{E}[\tau_k^2]$ *in funzione di* k *e* p.

Esercizio 6. *Si consideri una catena di Markov* $\{X_n\}$ *con quattro stati* $\{1,2,3,4\}$ *la cui matrice stocastica* P *è caratterizzata dai valori:*

$$\begin{aligned} &P(2,1) = 1\,,\; P(4,3) = 1\,,\\ &P(1,1) = \varepsilon\,,\; P(1,2) = (1-2\varepsilon)\,,\; P(1,3) = \varepsilon\,,\\ &P(3,1) = \varepsilon\,,\; P(3,3) = \varepsilon\,,\; P(3,4) = 1-2\varepsilon\,, \end{aligned}$$

per un certo $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ *assegnato.*

(1) Dire se la catena è regolare e determinare le sue misure invarianti.

(2) Calcolare $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 1 \,|\, X_0 = 4)$

(3) Sia

$$\tau = \inf\{n \geqslant 1 :\; X_n = 1\}\,.$$

Dimostrare che $\mathbb{P}(\tau > n \,|\, X_0 = 4) \geqslant (1-\varepsilon)^{n-1}$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$.

Soluzione Esercizio 1:

1) Se $X_n \overset{(d)}{\to} X$ e $Y_n \to 0$ in prob. allora $X_n + Y_n \overset{(d)}{\to} X$. Infatti, usando le funzioni caratteristiche si ha, per ogni $\theta \in \mathbb{R}$ e per ogni $\varepsilon > 0$:

$$\varphi_{X_n+Y_n}(\theta) = \mathbb{E}[e^{i\theta(X_n+Y_n)} 1_{E_n^\varepsilon}] + \mathbb{E}[e^{i\theta(X_n+Y_n)} 1_{(E_n^\varepsilon)^c}]$$

dove E_n^ε indica l'evento $\{|Y_n| < \varepsilon\}$. Ora,

$$\mathbb{E}[e^{i\theta(X_n+Y_n)} 1_{E_n^\varepsilon}] = \mathbb{E}[e^{i\theta X_n}] + C_{n,\varepsilon}(\theta)$$

dove dove il resto $C_{n,\varepsilon}(\theta)$ è dato da

$$\mathbb{E}\left[(e^{i\theta(X_n+Y_n)} - e^{i\theta X_n}) 1_{E_n^\varepsilon}\right] - \mathbb{E}\left[e^{i\theta X_n} 1_{(E_n^\varepsilon)^c}\right] .$$

Allora usando la stima nota $|e^{ia} - e^{ib}| \leqslant |a - b|$ si vede che

$$|C_{n,\varepsilon}|(\theta) \leqslant \varepsilon\, |\theta| + \mathbb{P}[(E_n^\varepsilon)^c] .$$

Per la convergenza in probabilità sappiamo che $\mathbb{P}[(E_n^\varepsilon)^c] \to 0$ ($n \to \infty$ e $\varepsilon > 0$ fissato). Quindi facendo prima il limite $n \to \infty$ e poi $\varepsilon \to 0$ otteniamo

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} C_{n,\varepsilon}(\theta) = 0$$

per ogni $\theta \in \mathbb{R}$.

Inoltre, per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$|\mathbb{E}[e^{i\theta(X_n+Y_n)} 1_{(E_n^\varepsilon)^c}]| \leqslant |\mathbb{E}[1_{(E_n^\varepsilon)^c}]| = \mathbb{P}[(E_n^\varepsilon)^c] \to 0 , \quad n \to \infty .$$

Ne segue che per ogni θ si ha

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n+Y_n}(\theta) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} \left[\varphi_{X_n}(\theta) + C_{n,\varepsilon} + \mathbb{E}[e^{i\theta(X_n+Y_n)} 1_{(E_n^\varepsilon)^c}]\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(\theta) = \varphi_X(\theta) . \end{aligned}$$

Cio' equivale alla convergenza in distribuzione.

2) Poiché h è funzione continua abbiamo che per ogni f continua e limitata la funzione $g := f \circ h$ è continua e limitata. Quindi $\mathbb{E}f(h(X_n + Y_n)) = \mathbb{E}g(X_n + Y_n) \to \mathbb{E}g(X) = \mathbb{E}f(h(X))$ per ogni f continua e limitata, il che equivale (per definizione) alla convergenza in distribuzione di $h(X_n + Y_n)$ a $h(X)$.

Soluzione Esercizio 2:

Sia $W_n := \sum_{k=1}^n X_k$. Il teorema del limite centrale stabilisce che

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{\sqrt{\sigma^2\, n}}\,(W_n - \mu n)\right| \leqslant \varepsilon\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-z^2/2}\, dz =: g(\varepsilon) .$$

Notiamo che $S_n = W_n + \sum_{k=1}^n 2^{-k} =: W_n + c_n$, con $0 \leqslant c_n \leqslant 1$. Allora $\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ se e solo se

$$\left|\frac{1}{\sqrt{\sigma^2\, n}}(W_n - \mu n) + \frac{c_n}{\sqrt{\sigma^2\, n}}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sigma}$$

Poiché $\frac{1}{\sqrt{\sigma^2 n}}(W_n - \mu n) =: Z_n \overset{(d)}{\to} N(0,1)$ e $\frac{c_n}{\sqrt{\sigma^2 n}} \to 0$ allora abbiamo (per es. usando la funzione caratteristica):

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma^2 n}}(W_n - \mu n) + \frac{c_n}{\sqrt{\sigma^2 n}} =: \widetilde{Z}_n \overset{(d)}{\to} N(0,1)\,.$$

Ne segue che per ogni $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\widetilde{Z}_n\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = g\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) > 0\,.$$

Soluzione Esercizio 3:

Come è noto la funzione caratteristica $\varphi_{W_p}(\theta) = \mathbb{E}e^{i\theta W_p}$, di una geometrica W_p di parametro p soddisfa

$$\varphi_{W_p}(\theta) = \frac{pe^{i\theta}}{1-(1-p)e^{i\theta}}\,.$$

Ora, $\varphi_{pW_p}(\theta) = \varphi_{W_p}(p\theta)$. Nel limite $p \to 0$ si ha $\varphi_{W_p}(p\theta) \to \frac{1}{1-i\theta}$, che corrisponde alla funzione caratteristica di una v.a. W esponenziale di parametro $\lambda = 1$. Cio' prova che $pW_p \overset{(d)}{\to} W$.

Soluzione Esercizio 5:

Sia $M_n := X_n - pn$. Poiché $M_n - M_{n-1} = Z_n - p$ si vede che M_n è una martingala rispetto alla filtrazione naturale $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \ldots, Z_n)$. Ora τ_k è un tempo d'arresto (rispetto a $\mathcal{F}_n$) con aspettazione finita (si vedano le soluzioni di altri esercizi per le semplici stime che permettono di stabilire a priori che $\mathbb{E}\tau_k < \infty$). Inoltre M_n ha incrementi limitati e dunque si puo' usare il teorema di Doob che permette di scrivere

$$\mathbb{E}M_{\tau_k} = \mathbb{E}M_0 = 0\,.$$

Allora, poiché $M_{\tau_k} = X_{\tau_k} - p\tau_k = k - p\tau_k$, si ha $\mathbb{E}\tau_k = \frac{k}{p}$.

Per calcolare $\mathbb{E}[\tau_k^2]$ abbiamo bisogno di una seconda martingala. In analogia con quanto gia' visto in altri problemi simili poniamo $G_n := M_n^2 - \alpha n$ e cerchiamo il valore di α che rende G_n una martingala. Abbiamo

$$M_n^2 - M_{n-1}^2 = 2(Z_n - p)M_{n-1} + (Z_n - p)^2\,.$$

Allora si vede che

$$\mathbb{E}[G_n - G_{n-1} \,|\, \mathcal{F}_{n-1}] = 0\,,$$

per $\alpha = \mathrm{Var}(Z_n) = p(1-p)$. Quindi con questa scelta di α la G_n è una martingala. Osserviamo che vale il teorema di Doob:

$$\mathbb{E}G_{\tau_k} = \mathbb{E}G_0 = 0\,. \tag{0.1}$$

Infatti $|M_{n\wedge\tau_k}| \leqslant \tau_k$ e quindi abbiamo la dominazione $|G_{n\wedge\tau_k}| \leqslant p(1-p)\tau_k + \tau_k^2$. Sappiamo a priori che $\mathbb{E}\tau_k^2 < \infty$ (di nuovo grazie a semplici stime note) quindi $G_{n\wedge\tau_k}$

è dominata da una funzione integrabile. Passando al limite $n \to \infty$ in $\mathbb{E}G_{n\wedge\tau_k} = \mathbb{E}G_0 = 0$ (che vale per ogni n essendo G una martingala) si ottiene la (0.1).

Sostituendo nella (0.1) l'identità $G_{\tau_k} = (k - p\tau_k)^2 - p(1-p)\tau_k$ e usando $\mathbb{E}\tau_k = k/p$ si ha

$$\mathbb{E}[\tau_k^2] = \frac{k^2}{p^2} + \frac{(1-p)k}{p^2}\,.$$

Nota: gli stessi risultati si ottengono in maniera anche piu' semplice se si osserva che τ_k non è altro che la somma di k v.a. geometriche *indipendenti* di parametro p.

Soluzione Esercizio 6:

1) La matrice P si puo' scrivere cosi':

$$P = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1-2\varepsilon & \varepsilon & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & 1-2\varepsilon \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La catena è irriducibile come è evidente da un diagramma delle transizioni. Essendo $P(x,x) > 0$ per qualche stato x allora sappiamo che è anche regolare. Vale il teorema ergodico e l'unica misura invariante ν soddisfa $P^n(i,j) \to \nu(j)$ per ogni i,j, se $n \to \infty$. Per trovare ν osserviamo che $\nu(j) = \sum_i \nu(i)P(i,j)$ implica: $\nu(4) = (1-2\varepsilon)\nu(3)$, $\nu(2) = (1-2\varepsilon)\nu(1)$. Inoltre $\nu(1) = \varepsilon\nu(1) + \nu(2) + \varepsilon\nu(3)$, $\nu(3) = \varepsilon\nu(1) + \nu(4) + \varepsilon\nu(3)$. Allora $\nu(1) = \nu(3)$ e ricordando che $\sum_i \nu(i) = 1$ si ottiene

$$\nu(1) = \nu(3) = \frac{1}{4(1-\varepsilon)}\,, \qquad \nu(4) = \nu(2) = \frac{1-2\varepsilon}{4(1-\varepsilon)}\,.$$

2) Abbiamo $\mathbb{P}(X_n = 1 \,|\, X_0 = 4) = P^n(4,1) \to \nu(1)$.

3) Osserviamo che

$$\{\tau > n\} = \{X_1 \in \{2,3,4\}, X_2 \in \{2,3,4\}, \dots, X_n \in \{2,3,4\}\}\,.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau > n) &= \sum_{\omega_1=2,3,4} \cdots \sum_{\omega_n=2,3,4} P(4,\omega_1)P(\omega_1,\omega_2)P(\omega_2,\omega_3)\dots P(\omega_{n-1},\omega_n) \\ &= \sum_{\omega_2=3,4} \cdots \sum_{\omega_n=3,4} P(3,\omega_2)P(\omega_2,\omega_3)\dots P(\omega_{n-1},\omega_n)\,,\end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che 2 non è raggiungibile se non passando per 1 e quindi le somme si restringono a $\omega_i = 3,4$ (tutti i termini con qualche $\omega_i = 2$ danno contributo nullo). Nell'espressione qui sopra possiamo sommare su ω_n e poiché $\omega_{n-1} \in \{3,4\}$ si ha che $\sum_{\omega_n=3,4} P(\omega_{n-1},\omega_n)$ vale $(1-\varepsilon)$ se $\omega_{n-1} = 3$ e vale 1 se $\omega_{n-1} = 4$. Allora $\sum_{\omega_n=3,4} P(\omega_{n-1},\omega_n) \geqslant 1-\varepsilon$. Ripetendo lo stesso argomento per $n-1$ e cosi' via si ottiene

$$\mathbb{P}(\tau > n) \geqslant (1-\varepsilon)^{n-1}\,.$$