Esercizi con catene di Markov
Pietro Caputo
12 dicembre 2006

Esercizio 1. *Si considerino i lanci di un dado (6 facce equiprobabili). Sia* X_n *il minimo tra i risultati ottenuti nei lanci* $1, 2, \ldots, n$.

- *Si calcoli la matrice di transizione associata alla catena di Markov definita da* X_n.
- *La catena è irriducibile ?*
- *Si calcoli la prob.* $p_{2,n}$ *che* $X_n > 2$ *al tempo* n, $n = 1, 2, \ldots$.

Esercizio 2. *Si consideri una catena di Markov con tre stati le cui transizioni sono descritte dalla matrice stocastica*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \varepsilon & 1-2\varepsilon & \varepsilon \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ *è fissato.*

1) Descrivere a parole l'evoluzione temporale associata a P.

2) Per ogni $i, j = 1, 2, 3$ *calcolare (se esiste) il limite*

$$\lim_{n\to\infty} P^n(i,j)\,.$$

3) Determinare tutte le misure invarianti.

Esercizio 3. *Sia* $S = \{0, 1, 2, \ldots, K\}$ *(dove* $K \in \mathbb{N}$ *è fissato). Si consideri la catena di Markov associata alla passeggiata aleatoria su* S *con parete riflettente in* 0 *e assorbente in* K. *La matrice stocastica* P *corrispondente soddisfa dunque*

$$\begin{aligned}
&P(0,0) = P(0,1) = \frac{1}{2} \\
&P(i,i+1) = P(i,i-1) = \frac{1}{2}\,, \quad \textit{per ogni}\ 1 \leqslant i \leqslant K-1 \\
&P(K,K) = 1
\end{aligned}$$

1) Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} P^n(i,K) = 1\,, \quad \forall i \in S\,.$$

2) Determinare tutte le misure invarianti.

Esercizio 4. *Sia* $S = \{0, 1, 2, \ldots, K\}$ *e si consideri la catena di Markov con spazio degli stati* S *definita dalla matrice di transizione* P *che soddisfa*

$$\begin{aligned}
&P(i,j) = \frac{1}{K}\,, \quad \textit{per ogni}\ i \neq 0\,,\ j \neq 0 \\
&P(0,0) = \varepsilon \\
&P(0,i) = \frac{1-\varepsilon}{K}\,, \quad \textit{per ogni}\ i \neq 0
\end{aligned}$$

1) Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} P^n(i,0) = 0\,, \quad \forall i \in S\,.$$

2) Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} P^n(i,j) = \frac{1}{K}\,, \quad \forall i \in S\,,\ j \in S \setminus \{0\}.$$

3) Determinare tutte le misure invarianti.

Esercizio 5. *Siano* P_1, P_2, P_3, P_4 *i vertici di un qudrato* Q. *Sia* P_5 *il punto di intersezione delle due diagonali di* Q. *Consideriamo la catena di Markov* $X_n, n \in \mathbb{N}$ *con spazio degli stati* $S = \{P_1, \dots, P_5\}$ *associato alle seguenti transizioni: per ogni* $i \neq 5$ *la transizione* $P_i \to P_5$ *ha probabilità* 1, *mentre per ogni* $j = 1, \dots, 5$ *la transizione* $P_5 \to P_j$ *ha probabilità* $1/5$.

1) Scrivere la matrice stocastica $P(i,j)$ *associata a* X_n.

2) Mostrare che P *è regolare*

3) Calcolare la misura invariante e descrivere il limte di $P^n(i,j)$ *(*$n \to \infty$*) per ogni* i, j.

Soluzione Esercizio 1:

La catena ha spazio degli stati $S = \{1, 2, \ldots, 6\}$. Notiamo che X_n, è necessariamente non–crescente quindi la matrice P associata soddisfa $P(i, j) = 0$ se $i < j$. Inoltre si calcola $P(i, i) = (6-i+1)/6$ per ogni $i \in S$ (ci sono $6-i+1$ facce del dado maggiori o uguali a i). Questo mostra anche il fatto che 1 è uno stato assorbente, ossia tale che $P(1, 1) = 1$. Per le altre transizioni abbiamo $P(i, j) = 1/6$ per ogni $j < i$. La matrice non è irriducibile poiché $P^n(1, j) = 0$ per ogni n se $j > 1$. La prob. $p_{2,n}$ coincide con la prob. che non sia mai uscito né 1 né 2 su n lanci. Quindi $p_{2,n} = (2/3)^n$.

Soluzione Esercizio 2:

Gli stati 1 e 3 sono assorbenti. Dallo stato 2 si salta in 1 o in 3 con prob. ε e si resta in 2 con prob. $1 - 2\varepsilon$. La catena non è irriducibile poiché c'è uno stato assorbente. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo $P^n(1, j) = 0$ se $j \neq 1$ e $P^n(1, 1) = 1$. Analogamente $P^n(3, j) = 0$ se $j \neq 3$ e $P^n(3, 3) = 1$. Per essere nello stato 2 al tempo n è necessario essere stati nello stato 2 in tutti i tempi precedenti e quindi $P^n(2, 2) = (1 - 2\varepsilon)^n \to 0$. Infine, $P^n(2, 1) + P^n(2, 3) = 1 - P^n(2, 2) \to 1$ e per simmetria $P^n(2, 1) = P^n(2, 3) \to \frac{1}{2}$. Passiamo alle misure invarianti. Una misura μ invariante deve soddisfare

$$\sum_{i=1}^{3} \mu(i)P(i, j) = \mu(j)\,, \quad j = 1, 2, 3\,.$$

Precisamente si deve avere $\mu(1) + \varepsilon\mu(2) = \mu(1)$, $(1-2\varepsilon)\mu(2) = \mu(2)$, $\varepsilon\mu(2) + \mu(3) = \mu(3)$. Se $\varepsilon \in (0, 1/2)$ queste identità sono equivalenti a richiedere $\mu(2) = 0$. Allora μ è invariante se e solo se $\mu(2) = 0$.

Soluzione Esercizio 3:

Se $i = K$ allora $P(K, K) = 1$ implica che $P^n(K, K) = 1$ per ogni n. Se $i \neq K$ allora $P^n(i, K)$ è la prob. che la passeggiata partita in i al tempo 0 sia in K al tempo n. Se X_n è la catena di Markov associata a P, allora

$$P^n(i, K) = \mathbb{P}(X_n = K \,|\, X_0 = i)\,.$$

Sia τ il tempo di primo arrivo in K per la passeggiata aleatoria X_n. Poiché una volta arrivata in K la passeggiata si ferma in K abbiamo che $\{\tau \leqslant n\} = \{X_n = K\}$ per ogni n. Allora

$$P^n(i, K) = \mathbb{P}(\tau \leqslant n \,|\, X_0 = i) = 1 - \mathbb{P}(\tau > n \,|\, X_0 = i)\,.$$

Non è difficile vedere che $\mathbb{P}(\tau > n \,|\, X_0 = i) \to 0$ esponenzialmente veloce quando $n \to \infty$. In effetti, per qualunque i, se esiste una successione di almeno K passi a destra consecutivi entro il tempo n allora sicuramente $\tau \leqslant n$. Poiché in qualunque punto la probabilità di salto a destra è $1/2$ allora τ è dominato per esempio da $K\sigma$

dove σ è una v.a. geometrica di parametro 2^{-K} (vedi anche soluzioni esercizi con martingale per argomenti analoghi). Allora per ogni i:

$$\mathbb{P}(\tau > n \,|\, X_0 = i) \leqslant \mathbb{P}(\sigma > n/K) = (1-2^{-K})^{\left[\frac{n}{K}\right]} \leqslant e^{-\delta(n-1)}\,,$$

per un $\delta > 0$ (per esempio $\delta = -\frac{\log(1-2^{-K})}{K}$). In particolare, $P^n(i,K) \to 1$.

Sia ν una misura invariante:

$$\sum_{i=0}^{K} \nu(i)P(i,j) = \nu(j)\,, \quad j = 0,\dots,K\,.$$

In particolare, $\nu(K) = \frac{1}{2}\nu(K-1) + \nu(K)$ e quindi $\nu(K-1) = 0$. Ma si ha anche $\nu(K-1) = \frac{1}{2}\nu(K-2)$, da cui $\nu(K-2) = 0$. Inoltre $\nu(K-2) = \frac{1}{2}\nu(K-3) + \frac{1}{2}\nu(K-1)$, da cui $\nu(K-3) = 0$. Ripetendo l'argomento fino a 0 si ottiene $\nu(i) = 0$ per ogni $i = 0,1,\dots,K-1$. Quindi $\nu = \delta_K$ ($\nu(K) = 1$ e $\nu(i) = 0$ per ogni $i = 0,1,\dots,K-1$) è l'unica misura invariante.

Lo stesso risultato si poteva ottenere anche cosi': se ν è invariante allora $\nu = \nu P^n$ per ogni n. Ma $P^n(i,K) \to 1$ per $n \to \infty$ e quindi $\nu P^n \to \delta_K$. Allora $\nu = \delta_K$.

Soluzione Esercizio 4:

Abbiamo $S = S_1 \cup S_0$ dove $S_1 := \{1,2,\dots,K\}$ e lo stato $S_0 := \{0\}$ è diverso dagli altri. Una volta entrata in S_1 la catena non esce da S_1. Da S_0 passa a S_1 con probabilità $1-\varepsilon$. Notiamo che la catena non è irriducibile poiché da S_1 non si puo' uscire.

Essere in S_0 al tempo n equivale a non essere mai usciti da S_0 per n passi. Poiché a ogni passo questo avviene con prob. ε allora

$$P^n(0,0) = \varepsilon^n\,, \quad n = 1,2,\dots$$

Inoltre, se $i \neq 0$ allora $P^n(i,0) = 0$ per ogni n.

Osserviamo che $P(i,j) = \frac{1}{K}$ per ogni $i,j \in S_1$ implica $P^n(i,j) = \frac{1}{K}$ per ogni $i,j \in S_1$ per ogni n. Infatti per ogni $i,j \in S_1$:

$$P^n(i,j) = \sum_{\ell=1}^{K} P^{n-1}(i,\ell)P(\ell,j) = \frac{1}{K}\sum_{\ell=1}^{K} P^{n-1}(i,\ell) = \frac{1}{K}(1-P^{n-1}(i,0)) = \frac{1}{K}\,.$$

Allora dobbiamo mostrare solo $P^n(0,j) \to \frac{1}{K}$ per ogni $j \in S_1$. Scriviamo, per $j \in S_1$:

$$\begin{aligned} P^n(0,j) &= \sum_{\ell=0}^{K} P^{n-1}(0,\ell)P(\ell,j) = P^{n-1}(0,0)P(0,j) + \sum_{\ell=1}^{K} P^{n-1}(0,\ell)P(\ell,j) \\ &= \varepsilon^{n-1}\,\frac{1-\varepsilon}{K} + \frac{1}{K}\sum_{\ell=1}^{K} P^{n-1}(0,\ell)\,. \end{aligned}$$

Ma $\sum_{\ell=1}^{K} P^{n-1}(0,\ell) = 1 - P^{n-1}(0,0) = 1-\varepsilon^{n-1}$. Allora $P^n(0,j) \to \frac{1}{K}$, $n \to \infty$, se $j \in S_1$.

Passiamo alle misure invarianti. Se ν è una misura invariante allora $\nu = \nu P^n$ per ogni n. Chiamiamo μ_1 la misura $\mu_1(i) = 1/K$ se $i \in S_1$ e $\mu_1(0) = 0$. Allora quanto visto sopra implica che per ogni i e j si ha $P^n(i,j) \to \mu_1(j)$. Allora per ogni ν si ha $\nu P^n \to \mu_1$ e quindi μ_1 è l'unica misura invariante.

Soluzione Esercizio 5:

Si ha

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

P è regolare, infatti $P^2(i,j) > 0$ per ogni i, j come si verifica facilmente. Se ν è invariante allora

$$\nu(j) = \sum_{i=1}^{5} \nu(i) P(i,j) = \frac{1}{5}\,\nu(5)\,, \qquad j = 1,2,3,4\,.$$

Dunque $\nu(1) = \cdots = \nu(4) = \frac{1}{5}\nu(5)$ e richiedendo $\sum_{i=1}^{5} \nu(i) = 1$ si ha $\nu(\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{5}{9})$. La misura invariante soddisfa inoltre, grazie al teorema ergodico per catene regolari:

$$P^n(i,j) \to \nu(j)$$

per ogni i, j. In particolare, ν è l'unica misura invariante.