Esercizi con martingale
Pietro Caputo
23 novembre 2006

Esercizio 1. *Sia* $\{X_n\}$ *la passeggiata aleatoria simmetrica su* $\mathbb{Z}$ *con* $X_0 = 0$, *vale a dire che* $Z_k = X_k - X_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$ *sono indipendenti e valgono* ± 1 *con probabilità* $1/2$. *Per* $\ell \in \mathbb{Z}$, *sia* τ_ℓ *il tempo di prima visita al punto* ℓ*:*

$$\tau_\ell = \inf \{n \geqslant 0 \,:\; X_n = \ell\} \,. \tag{0.1}$$

Dimostrare che:

1) $\mathbb{P}(\tau_\ell < \infty) = 1 \,, \quad \ell \in \mathbb{Z} \,,$

2) $\mathbb{E}\tau_\ell = +\infty \,, \quad \ell \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Esercizio 2. *Sia* $\{X_n\}$ *la passeggiata aleatoria simmetrica su* $\mathbb{Z}$ *con* $X_0 = 0$ *(come in Esercizio 1). Sia* τ_ℓ *definito da* (0.1). *Per* $\ell, m \in \{0, 1, 2, \dots\}$ *fissati definiamo*

$$\tau_{\ell,m} = \tau_{-\ell} \wedge \tau_m \,, \tag{0.2}$$

ossia il tempo di prima visita al punto $-\ell$ *o* m.

1) Dimostrare che $\mathbb{E}\tau_{\ell,m} < \infty$

2) Calcolare $\mathbb{E}\tau_{\ell,m}$ *utilizzando un'opportuna martingala associata a* X_n.

Esercizio 3. *Ripetere l'Esercizio 2 nel caso in cui* $\{X_n\}$ *è la passeggiata aleatoria asimmetrica su* $\mathbb{Z}$ *con* $X_0 = 0$ *(come in Esercizio 1 ma* $Z_k = +1$ *con prob.* p *e* -1 *con prob.* $q = 1 - p$, $p > \frac{1}{2}$*).*

Esercizio 4. *Una sequenza viene generata a caso utilizzando i quattro caratteri* $\heartsuit, \clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit$. *Calcolare quanto tempo dobbiamo aspettare in media per vedere per la prima volta la successione*

$$\clubsuit \heartsuit \clubsuit \heartsuit \clubsuit \,.$$

Esercizio 5. *Siano* $Z_1, Z_2, \dots$ *i.i.d. Bernoulli di parametro* $\frac{1}{2}$. *Calcolare* $\mathbb{E}\,\tau$ *dove*

$$\tau = \inf\{n \geqslant 6 : \; (Z_{n-5}, Z_{n-4}, Z_{n-3}, Z_{n-2}, Z_{n-1}, Z_n) = (0, 0, 1, 1, 0, 0)\} \tag{0.3}$$

Esercizio 6. *Siano* $Z_1, Z_2, \dots$ *i.i.d. Bernoulli di parametro* $p = \frac{3}{4}$. *Calcolare* $\mathbb{E}\,\tau$ *dove* τ *è definito da (0.3).*

Soluzione Esercizio 1:

1) Sia $\ell \geqslant 0$. Se $\ell = 0$, si ha $\tau_\ell = 0$ quindi prendiamo $\ell > 0$. Supponiamo che $\omega \in \Omega$ è tale che $\tau_\ell(\omega) = +\infty$. Allora $X_n(\omega) < \ell$ per ogni ℓ, e quindi $\limsup_{n\to\infty} X_n(\omega) \leqslant \ell$. Sia $\Omega_{0,\ell}$ l'insieme di ω tali che $\limsup_{n\to\infty} X_n(\omega) \leqslant \ell$. Poiché sappiamo che $\limsup_{n\to\infty} X_n = +\infty$, $\mathbb{P}$–q.c. (vedi esercitazione 2/11/06) si ha $\mathbb{P}(\Omega_{0,\ell}) = 0$, per ogni $\ell > 0$. Allora

$$\mathbb{P}(\tau_\ell(\omega) = +\infty) \leqslant \mathbb{P}(\Omega_{0,\ell}) = 0\,,$$

per ogni $\ell > 0$. Pertanto, $\mathbb{P}(\tau_\ell < \infty) = 1$ per ogni $\ell > 0$. Lo stesso vale, per simmetria, per il caso $\ell < 0$.

2) Ricordiamo che X_n è una martingala rispetto alla filtrazione naturale $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \ldots, Z_n)$. Sia $\ell \neq 0$. Poiché τ_ℓ è tempo d'arresto rispetto a $\{\mathcal{F}_n\}$, si ha che $X_{n\wedge\tau_\ell}$ è una martingala rispetto a $\{\mathcal{F}_n\}$. Inoltre $|Z_k| \leqslant 1$ quindi X_n ha incrementi limitati da 1. Supponiamo per assurdo che $\mathbb{E}\tau_\ell < \infty$. Poiché $X_{\tau_\ell} = \ell$ q.c., per il teorema di Doob sullo "optional stopping" si avrebbe

$$0 = \mathbb{E}X_{n\wedge\tau_\ell} \to \mathbb{E}X_{\tau_\ell} = \ell \neq 0\,.$$

Soluzione Esercizio 2:

1) Siano ℓ, m interi positivi fissati. Sia $k = \ell + m$. Per ogni $j \in \mathbb{N}$ definiamo E_j come l'evento $\{Z_{(j-1)k+1} = Z_{(j-1)k+2} = \cdots = Z_{j\,k} = +1\}$. Abbiamo che gli E_j sono eventi indipendenti e $\mathbb{P}(E_j) = 2^{-k}$. Fissiamo $n \in \mathbb{N}$. Osserviamo che se $\omega \in E_j$ per qualche $j \leqslant n$ allora $\tau_{\ell,m} \leqslant n\,k$. Infatti se $\omega \in E_j$ per un qualche $j \leqslant n$, allora $X_{j\,k} - X_{(j-1)\,k} = k$ e quindi o $X_{j\,k} \notin (-\ell, m)$ oppure $X_{(j-1)\,k} \notin (-\ell, m)$.

Ne segue che

$$\{\tau_{\ell,m} > n\,k\} \subset \cap_{j=1}^{n} E_j^c \,.$$

Pertanto

$$\mathbb{P}(\tau_{\ell,m} > n\,k) \leqslant \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}(E_j) = (1 - 2^{-k})^n \,. \tag{0.4}$$

Usando una nota formula per il calcolo dell'aspettazione si ha

$$\mathbb{E}\tau_{\ell,m} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\tau_{\ell,m} \geqslant i) \,,$$

e stimando $\mathbb{P}(\tau_{\ell,m} \geqslant i) \leqslant \mathbb{P}(\tau_{\ell,m} > n\,k)$, per ogni i e n tali che $i > n\,k$, tramite la (0.4) si arriva facilmente a

$$\mathbb{E}\tau_{\ell,m} \leqslant k \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\tau_{\ell,m} > n\,k) \leqslant k \sum_{n=0}^{\infty} (1 - 2^{-k})^n = k\,2^k \,.$$

[Notiamo che alla stessa conclusione si può giungere osservando che se $\sigma := \inf\{j \geqslant 1 : 1_{E_j} = 1\}$, allora per quanto visto sopra si ha $\tau_{\ell,m} \leqslant k\,\sigma$. Ma σ è una v.a. geometrica di parametro $p = \mathbb{P}(E_j) = 2^{-k}$. Quindi $\mathbb{E}\sigma = p^{-1} = 2^k$ e $\mathbb{E}\tau \leqslant k\,2^k$].

2) Sia $M_n := X_n^2 - n$. Allora

$$M_n - M_{n-1} = (X_{n-1} + Z_n)^2 - X_{n-1}^2 - 1 = Z_n^2 + 2Z_n X_{n-1} - 1 \,.$$

Quindi $\mathbb{E}[M_n - M_{n-1} \,|\, \mathcal{F}_{n-1}] = 0$, q.c. ovvero M_n è una martingala rispetto a $\mathcal{F}_n$. Osserviamo che $|M_n - M_{n-1}| \leqslant |Z_n^2| + 2|Z_n||X_{n-1}| + 1 \leqslant 2 + 2|X_{n-1}|$. Quindi per $n \leqslant \tau_{\ell,m}$ si ha $|M_n - M_{n-1}| \leqslant 2 + 2k$, con $k = \ell + m$ come sopra. Allora gli incrementi di $M_{n \wedge \tau_{\ell,m}}$ sono limitati. Poiché $\mathbb{E}\tau_{\ell,m} < \infty$ per il punto precedente, possiamo applicare il Teorema di Doob sullo "optional stopping":

$$\mathbb{E}M_{\tau_{\ell,m}} = \mathbb{E}M_0 = 0 \,. \tag{0.5}$$

Ma $\mathbb{E}M_{\tau_{\ell,m}} = \mathbb{E}X_{\tau_{\ell,m}}^2 - \mathbb{E}\tau_{\ell,m}$. Scrivendo $\rho := \mathbb{P}(X_{\tau_{\ell,m}} = -\ell)$, si ha che $X_{\tau_{\ell,m}}$ vale $-\ell$ con probabilità ρ e vale m con probabilità $1 - \rho$. Allora

$$\mathbb{E}X_{\tau_{\ell,m}}^2 = \rho\,\ell^2 + (1 - \rho)\,m^2 \,. \tag{0.6}$$

Allora per la (0.5) abbiamo $\mathbb{E}\tau_{\ell,m} = \rho\,\ell^2 + (1 - \rho)\,m^2$. Nel caso $\ell = m$ si ottiene

$$\mathbb{E}\tau_{\ell,\ell} = \ell^2 \,.$$

Per avere la formula nel caso generale $\ell \neq m$ dobbiamo conoscere il valore di ρ nella (0.6). A tal fine basta osservare quanto segue. Per il Teorema di Doob si ha

$$\mathbb{E}X_{\tau_{\ell,m}} = \mathbb{E}M_0 = 0\,.$$

Quindi, usando $\mathbb{E}X_{\tau_{\ell,m}} = \rho(-\ell) + (1-\rho)m$, si ottiene

$$\rho = \frac{m}{\ell + m}\,.$$

Tornando alle (0.5) e (0.6) si ha

$$\mathbb{E}\tau_{\ell,m} = \ell\, m\,.$$

Soluzione Esercizio 3:

La dimostrazione del punto 1) è del tutto analoga tranne che ora si ha $\mathbb{P}(E_j) = p^k$ e quindi $\mathbb{E}\tau_{\ell,m} \leqslant kp^{-k}$. Per il punto 2) si può utilizzare

$$M_n := X_n - n\,(p-q)\,.$$

Si verifica che M_n è una martingala. Gli argomenti usuali allora portano alla identità

$$\mathbb{E}\tau_{\ell,m} = \frac{-\ell\,\rho + m\,(1-\rho)}{p-q}\,,$$

dove $\rho = \mathbb{P}(X_{\tau_{\ell,m}} = -\ell)$. La probabilità ρ si può calcolare con l'ausilio del processo $W_n := \left(\frac{q}{p}\right)^{X_n}$ come segue. E' facile verificare che W_n è una martingala (prodotto di variabili indipendenti non–negative e a media 1) con $W_0 = 1$. Quindi

$$1 = \mathbb{E}W_{\tau_{\ell,m}} = \rho\,\left(\frac{q}{p}\right)^{-\ell} + (1-\rho)\left(\frac{q}{p}\right)^{m}\,.$$

Ne segue che

$$\rho = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{m}}{\left(\frac{q}{p}\right)^{-\ell} - \left(\frac{q}{p}\right)^{m}}\,.$$

Soluzione Esercizio 4:

Sia Z una variabile aletoria che assume quattro valori con uguale probabilità:

$$Z = \begin{cases} \clubsuit & \text{con prob. } \frac{1}{4} \\ \heartsuit & \text{con prob. } \frac{1}{4} \\ \spadesuit & \text{con prob. } \frac{1}{4} \\ \diamondsuit & \text{con prob. } \frac{1}{4} \end{cases}$$

Siano $Z_1, Z_2, \ldots$ v.a. indipendenti, ciascuna distribuita come Z. Sia $M_n^{(1)}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ il processo definito da

$$M_k^{(1)} := \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 4\, 1_{Z_1 = \clubsuit} & k = 1 \\ 4^2\, 1_{Z_1 = \clubsuit} 1_{Z_2 = \heartsuit} & k = 2 \\ 4^3\, 1_{Z_1 = \clubsuit} 1_{Z_2 = \heartsuit} 1_{Z_3 = \clubsuit} & k = 3 \\ 4^4\, 1_{Z_1 = \clubsuit} 1_{Z_2 = \heartsuit} 1_{Z_3 = \clubsuit} 1_{Z_4 = \heartsuit} & k = 4 \\ 4^5\, 1_{Z_1 = \clubsuit} 1_{Z_2 = \heartsuit} 1_{Z_3 = \clubsuit} 1_{Z_4 = \heartsuit} 1_{Z_5 = \clubsuit} & k \geqslant 5 \end{cases} \tag{0.7}$$

Sia $\mathcal{F}_n := \sigma(Z_1, \ldots, Z_n)$ la filtrazione naturale. Dalla (0.7) vediamo che $M^{(1)}$ è una martingala rispetto a $\{\mathcal{F}_n\}$. Infatti $M_n^{(1)}$ può essere scritto nella forma

$$M_n^{(1)} = \prod_{j=1}^{n} Y_j \,, \tag{0.8}$$

con Y_j v.a. indipendenti, tali che per ogni j si ha che Y_j è $\mathcal{F}_j$–misurabile e $\mathbb{E}[Y_j] = 1$. Basta prendere $Y_j = 1$ per ogni $j > 5$ e la definizione degli Y_j per $j \leqslant 5$ è evidente dalla (0.7).

Più in generale definiamo la martingala $M^{(\ell)}$, per ogni $\ell \in \mathbb{N}$ come segue

$$M_k^{(\ell)} := \begin{cases} 1 & k < \ell \\ 4\, 1_{Z_\ell = \clubsuit} & k = \ell \\ 4^2\, 1_{Z_\ell = \clubsuit} 1_{Z_{\ell+1} = \heartsuit} & k = \ell + 1 \\ 4^3\, 1_{Z_\ell = \clubsuit} 1_{Z_{\ell+1} = \heartsuit} 1_{Z_{\ell+2} = \clubsuit} & k = \ell + 2 \\ 4^4\, 1_{Z_\ell = \clubsuit} 1_{Z_{\ell+1} = \heartsuit} 1_{Z_{\ell+2} = \clubsuit} 1_{Z_{\ell+3} = \heartsuit} & k = \ell + 3 \\ 4^5\, 1_{Z_\ell = \clubsuit} 1_{Z_{\ell+1} = \heartsuit} 1_{Z_{\ell+2} = \clubsuit} 1_{Z_{\ell+3} = \heartsuit} 1_{Z_{\ell+4} = \clubsuit} & k \geqslant \ell + 4 \end{cases} \tag{0.9}$$

Scegliendo $Y_j = 1$ per $j < \ell$ o $j > \ell + 4$ si vede dalla (0.9) che $M^{(\ell)}$ può essere rappresentata nella forma (0.8). Quindi per ogni $\ell \in \mathbb{N}$, $M^{(\ell)}$ è una martingala rispetto a $\{\mathcal{F}_n\}$.

Sia ora Q_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ il processo definito da

$$Q_n = \sum_{\ell=1}^{n} M_n^{(\ell)} \quad n \geqslant 1 \,, \quad Q_0 := 0 \,. \tag{0.10}$$

Usando la proprietà di martingala per ogni $M^{(\ell)}$ si ha:

$$\mathbb{E}[Q_n \,|\, \mathcal{F}_{n-1}] = \sum_{\ell=1}^{n} \mathbb{E}[M_n^{(\ell)} \,|\, \mathcal{F}_{n-1}] = \sum_{\ell=1}^{n} M_{n-1}^{(\ell)} = Q_{n-1} + M_{n-1}^{(n)} .$$

Dalla (0.9) abbiamo che $M_{n-1}^{(n)} = 1$. Poniamo $X_n := Q_n - n$. Inoltre, per definizione, $X_0 = 0$. In particolare, da quanto visto sopra si ha che

$$X_n - X_{n-1} = \sum_{\ell=1}^{n} \left[M_n^{(\ell)} - M_{n-1}^{(\ell)} \right] . \tag{0.11}$$

La (0.11) mostra che X_n è una martingala rispetto a $\{\mathcal{F}_n\}$. Inoltre, la (0.11) mostra anche che X_n ha incrementi limitati: $|X_n - X_{n-1}| \leqslant 6 \cdot 4^5$ poiché $M_n^{(\ell)}$ è sempre uguale a 1 tranne che in $n = \ell, \ell+1, \ldots, \ell+4$ dove assume valori tra 0 e 4^5.

Sia ora τ il primo momento in cui si vede la sequenza $\clubsuit \heartsuit \clubsuit \heartsuit \clubsuit$. Allora τ è tempo d'arresto per $\{\mathcal{F}_n\}$. Dimostriamo prima di tutto che $\mathbb{E}\tau < \infty$. Definiamo E_j come l'evento

$$\{Z_{5(j-1)+1} = \clubsuit\, ,\; Z_{5(j-1)+2} = \heartsuit\, ,\; Z_{5(j-1)+3} = \clubsuit\, ,\; Z_{5(j-1)+4} = \heartsuit\, ,\; Z_{5(j-1)+5} = \clubsuit\} \, .$$

Sia $\sigma := \inf\{j \geqslant 1 : \; 1_{E_j} = 1\}$. Allora poiché $\{E_j\}$ sono eventi indipendenti e equiprobabili si ha che σ è una v.a. geometrica di parametro $p = \mathbb{P}(E_j) = 4^{-5}$. Quindi $\mathbb{E}\sigma = p^{-1} = 4^5$. Ma è chiaro che $\tau \leqslant 5\sigma$ e quindi $\mathbb{E}\tau \leqslant 5\, 4^5$.

Sappiamo dunque che $\mathbb{E}\tau < \infty$ e X_n è martingala con incrementi uniformemente limitati. Il teorema di Doob sullo "optional stopping" permette allora di concludere che

$$\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_0 = 0 \, . \tag{0.12}$$

Poiché $X_\tau = Q_\tau - \tau$, la (0.12) mostra che $\mathbb{E}\tau = \mathbb{E}Q_\tau$. Calcoliamo ora Q_τ tramite l'identità $Q_\tau = \sum_{\ell=1}^{\tau} M_\tau^{(\ell)}$. Per costruzione è evidente che $M_\tau^{(\ell)} = 0$ per ogni $\ell \leqslant \tau - 5$. Inoltre le (0.9) mostrano che in maniera deterministica possiamo asserire: $M_\tau^{(\tau-4)} = 4^5$, $M_\tau^{(\tau-3)} = 0$, $M_\tau^{(\tau-2)} = 4^3$, $M_\tau^{(\tau-1)} = 0$, $M_\tau^{(\tau)} = 4$. Otteniamo quindi

$$\mathbb{E}\,\tau = \mathbb{E}\,Q_\tau = 4 + 4^3 + 4^5 = 1092 \, . \tag{0.13}$$

Costruzione alternativa per l'esercizio 4:

Consideriamo il seguente problema generale. Siano $\{Z_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ variabili aleatorie i.i.d. uniformi nell'insieme finito $\{1,\dots,L\}$. Definiamo $\tau_{a_1\cdots a_\ell}$ come il primo $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$(Z_{k-\ell+1},\dots,Z_k) = (a_1,\dots,a_\ell).$$

Vale a dire che $\tau_{a_1\cdots a_\ell}$ è il primo tempo in cui osserviamo la stringa $(a_1,\dots,a_\ell)$ se a ogni passo estraiamo una lettera uniformemente a caso nell'alfabeto $\{1,\dots,L\}$. La seguente ricetta permette di calcolare $\mathbb{E}[\tau_{a_1\cdots a_\ell}]$. Definiamo, per ogni $j = 0,1,\dots,$

$$X_n^{(j)} = \sum_{i=1}^n W_i^{(j)}, \qquad X_0^{(j)} = 0,$$

dove

$$W_i^{(j)} = \begin{cases} L\,\mathbf{1}_{Z_i = a_{i-j}} - 1 & \text{se } j+1 \leqslant i \leqslant j+\ell \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Notiamo che le $W_i^{(j)}$, $i = 1,2,\dots$ sono indipendenti, limitate, e hanno media 0, e dunque $X^{(j)}$ è una martingala, per ogni $j \geqslant 0$, rispetto alla filtrazione $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1,\dots,Z_n)$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset,\Omega\}$. Definiamo ora, per ogni $j = 0,1,\dots,$ il processo

$$C_i^{(j)} := \begin{cases} 0 & i \leqslant j \\ 1 & i = j+1 \\ L\,\mathbf{1}_{Z_{j+1}=a_1} & i = j+2 \\ \cdots & \cdots \\ L^{\ell-1}\,\mathbf{1}_{Z_{j+1}=a_1,\dots,Z_{j+\ell-1}=a_{\ell-1}} & i = j+\ell \\ 0 & i > j+\ell \end{cases} \tag{0.14}$$

Notiamo che per ogni $i \in \mathbb{N}$, $C_i^{(j)}$ è $\mathcal{F}_{i-1}$-misurabile. Ossia per ogni $j = 0,1,\dots,$ il processo $\{C_i^{(j)},\ i \in \mathbb{N}\}$ è prevedibile. Allora

$$Y_n^{(j)} = \sum_{i=1}^n C_i^{(j)}(X_i^{(j)} - X_{i-1}^{(j)}), \qquad Y_0^{(j)} = 0, \tag{0.15}$$

definisce una martingala, per ogni $j = 0,1,\dots$. E' evidente che $Y_n^{(j)} = 0$ se $j \geqslant n$. Notiamo che se $n \geqslant j+\ell$ allora

$$\begin{aligned} Y_n^{(j)} &= C_{j+1}^{(j)} W_{j+1}^{(j)} + \cdots + C_{j+\ell}^{(j)} W_{j+\ell}^{(j)} \\ &= (L\mathbf{1}_{Z_{j+1}=a_1} - 1) + \cdots + (L^\ell \mathbf{1}_{Z_{j+1}=a_1,\dots,Z_{j+\ell}=a_\ell} - L^{\ell-1}\mathbf{1}_{Z_{j+1}=a_1,\dots,Z_{j+\ell-1}=a_{\ell-1}}) \\ &= L^\ell \mathbf{1}_{Z_{j+1}=a_1,\dots,Z_{j+\ell}=a_\ell} - 1. \end{aligned}$$

Inoltre, se $n = j+\ell-h$, con $1 \leqslant h \leqslant \ell-1$ si ha

$$Y_n^{(j)} = L^{\ell-h}\mathbf{1}_{Z_{j+1}=a_1,\dots,Z_{j+\ell-h}=a_{\ell-h}} - 1.$$

In particolare, se $j < \tau_{a_1,\dots,a_\ell} - \ell$, allora necessariamente $Y^{(j)}_{\tau_{a_1,\dots,a_\ell}} = -1$, mentre se $j = \tau_{a_1,\dots,a_\ell} - \ell$, allora

$$Y^{(\tau_{a_1,\dots,a_\ell}-\ell)}_{\tau_{a_1,\dots,a_\ell}} = L^\ell - 1.$$

Inoltre, se $j = \tau_{a_1,\dots,a_\ell} - \ell + h$, con $h = 1, \dots, \ell-1$ si ha

$$Y^{(\tau_{a_1,\dots,a_\ell}-\ell+h)}_{\tau_{a_1,\dots,a_\ell}} = L^{\ell-h}\mathbf{1}_{(a_1,\dots,a_{\ell-h})=(a_{h+1},\dots,a_\ell)} - 1.$$

L'interpretazione è che $Y^{(j)}_n$ rappresenta la vincita netta al tempo n di un giocatore che arriva al tempo j e comincia a scommettere puntando 1 al tempo $j+1$; il giocatore scommette sulla stringa $a_1, \dots, a_\ell$, e finché questa si realizza egli continua a scommettere puntando a ogni passo tutta la posta realizzata fino a quel punto; non appena la stringa smette di realizzarsi oppure si realizza completamente, allora il giocatore smette di puntare.

Consideriamo ora la somma

$$M_n = \sum_{j=0}^{\infty} Y^{(j)}_n\,, \qquad M_0 = 0\,. \tag{0.16}$$

Per linearità $\{M_n\}$ è una martingala. Notiamo che per ogni n si ha che solo un numero finito di j contribuisce al valore di M_n. Con gli argomenti usuali possiamo giustificare l'applicazione del teorema di optional stopping, e otteniamo

$$\mathbb{E}[M_{\tau_{a_1,\dots,a_\ell}}] = 0\,. \tag{0.17}$$

Con le osservazioni fatte sopra possiamo calcolare $M_{\tau_{a_1,\dots,a_\ell}}$:

$$\begin{aligned} M_{\tau_{a_1,\dots,a_\ell}} &= -(\tau_{a_1,\dots,a_\ell} - \ell) + (L^\ell - 1) + \sum_{h=1}^{\ell-1}(L^{\ell-h}\mathbf{1}_{(a_1,\dots,a_{\ell-h})=(a_{h+1},\dots,a_\ell)} - 1) \\ &= -\tau_{a_1,\dots,a_\ell} + L^\ell + \sum_{h=1}^{\ell-1} L^{\ell-h}\mathbf{1}_{(a_1,\dots,a_{\ell-h})=(a_{h+1},\dots,a_\ell)}. \end{aligned}$$

Allora concludiamo che

$$\mathbb{E}[\tau_{a_1,\dots,a_\ell}] = L^\ell + \sum_{h=1}^{\ell-1} L^{\ell-h}\mathbf{1}_{(a_1,\dots,a_{\ell-h})=(a_{h+1},\dots,a_\ell)}\,. \tag{0.18}$$

Poiché $\mathbf{1}_{(a_1,\dots,a_{\ell-h})=(a_{h+1},\dots,a_\ell)} = 1$ se $h = 0$, possiamo riscrivere la (0.18) in forma piú compatta come segue:

$$\mathbb{E}[\tau_{a_1,\dots,a_\ell}] = \sum_{h=0}^{\ell-1} L^{\ell-h}\mathbf{1}_{(a_1,\dots,a_{\ell-h})=(a_{h+1},\dots,a_\ell)}\,. \tag{0.19}$$

Per risolvere l'esercizio (4) allora possiamo scegliere $L = 4$, $\ell = 5$, e $(a_1, \dots, a_\ell) = (1, 2, 1, 2, 1)$. Troviamo che la (0.17) diventa

$$\mathbb{E}[\tau_{12121}] = 4^5 + 4^3 + 4,$$

che coincide infatti con la (0.13). Possiamo anche osservare che le due martingale utilizzate, $Q_n - n$ dalla (0.10) e M_n dalla (0.16) sono equivalenti.

Soluzione Esercizio 5:

Con lo stesso metodo visto nell'Esercizio 4 si ottiene

$$\mathbb{E}\,\tau = 2 + 2^2 + 2^6 = 70\,.$$

Soluzione Esercizio 6:

Dobbiamo adattare l'argomento generale visto nella soluzione dell'esercizio 4 al caso di lettere non equiprobabili nell'alfabeto $\{1,\ldots,L\}$. Possiamo procedere come in (0.15). L'unica differenza è che ora ciascuna lettera $w \in \{1,\ldots,L\}$ ha probabilità $p(w) = \mathbb{P}(Z_1 = w)$, che dipende da w. Allora dobbiamo porre

$$W_i^{(j)} = \begin{cases} \frac{\mathbf{1}_{Z_i = a_{i-j}}}{p(a_{i-j})} - 1 & \text{se } j+1 \leqslant i \leqslant j+\ell \\ 0 & \text{altrimenti } i > \ell \end{cases}$$

dove $p(a_i) = \mathbb{P}(Z_1 = a_i)$. Le $W_i^{(j)}$ sono i.i.d. limitate, e hanno media 0, e dunque $X^{(j)}$ è una martingala, per ogni $j \geqslant 0$, rispetto alla filtrazione $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1,\ldots,Z_n)$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Definiamo ora, per ogni $j = 0, 1, \ldots$, il processo

$$C_i^{(j)} := \begin{cases} 0 & i \leqslant j \\ 1 & i = j+1 \\ \frac{\mathbf{1}_{Z_{i+1}=a_1}}{p(a_1)} & i = j+2 \\ \cdots & \cdots \\ \frac{\mathbf{1}_{Z_{i+1}=a_1,\ldots,Z_{i+\ell-1}=a_{\ell-1}}}{p(a_1)\cdots p(a_{\ell-1})} & i = j+\ell \\ 0 & i > j+\ell \end{cases} \tag{0.20}$$

Come sopra calcoliamo $M_{\tau_{a_1,\ldots,a_\ell}}$:

$$M_{\tau_{a_1,\ldots,a_\ell}} = -\tau_{a_1,\ldots,a_\ell} + \prod_{i=1}^{\ell} \frac{1}{p(a_i)} + \sum_{h=1}^{\ell-1} \left(\prod_{i=1}^{\ell-h} \frac{1}{p(a_i)} \right) \mathbf{1}_{(a_1,\ldots,a_{\ell-h})=(a_{h+1},\ldots,a_\ell)}.$$

La (0.19) in questo caso diventa:

$$\mathbb{E}[\tau_{a_1,\ldots,a_\ell}] = \sum_{h=0}^{\ell-1} \left(\prod_{i=1}^{\ell-h} \frac{1}{p(a_i)} \right) \mathbf{1}_{(a_1,\ldots,a_{\ell-h})=(a_{h+1},\ldots,a_\ell)}\,. \tag{0.21}$$

Nel problema richiesto si ottiene, con $L = 2$, $p(1) = p$, $p(0) = q = 1-p$: ottiene:

$$\mathbb{E}\,\tau = q^{-1} + q^{-2} + q^{-4}\,p^{-2}\,.$$