Soluzione Primo Esonero CP2

8 novembre 2006

Esercizio 1. *Sia* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di variabili aleatorie di Bernoulli (p) indipendendenti,* $p \in (0,1)$.

1) Enunciare e illustrare con un esempio la legge $0-1$ *di Kolmogorov.*

2) Fare un esempio di evento che ha probabilità 1 *e non appartiene alla* σ*-algebra di coda* $\mathcal{T}$.

Soluzione: abbiamo $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots)\,,\ \omega_i \in \{0,1\}\}$. Poniamo $X_n(\omega) = \omega_n$ e la σ–algebra $\mathcal{F}$ su Ω è la piu' piccola tale che tutte le X_n siano misurabili: $\mathcal{F} = \sigma(X_1, X_2, \dots)$. La probabilità è quella misura $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ tale gli E_i sono indipendenti e tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(E_n) = p$, $\mathbb{P}(E_n^c) = 1-p$, dove $E_n = \{\omega :\ \omega_n = 1\}$, e $E_n^c = \Omega \setminus E_n = \{\omega :\ \omega_n = 0\}$, dove $p \in (0,1)$.

1) Sia $\mathcal{T}_n := \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)$ e sia $\mathcal{T} := \cap_n \mathcal{T}_n$. La legge 0–1 asserisce che $\mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$ per ogni $A \in \mathcal{T}$. Per esempio

$$A = \limsup E_n = \cap_n \cup_{k \geqslant n} E_k\,,$$

ovvero A è l'evento $\{$infinite teste occorrono$\}$. Allora $A \in \mathcal{T}$ e $\mathbb{P}(A) = 1$ come segue per esempio dal secondo lemma di Borel–Cantelli.

2) Sia E_n come sopra. Sia $B = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$. Allora $B \supset A$ e quindi $\mathbb{P}(B) = 1$ ma $B \notin \mathcal{T}$. Il fatto che $B \notin \mathcal{T}$ segue per esempio dall'osservazione che $E_1 \notin \mathcal{T}_1$.

Esercizio 2. *Sia X una v.a. con funzione di distribuzione $F_X(x)$ data da*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & se \ x < -1 \\ \frac{1}{4} & se \ -1 \leqslant x < 0 \\ \frac{1}{2} & se \ 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & se \ 1 \leqslant x \end{cases} \tag{0.1}$$

1) Calcolare $\mathbb{E}X$ *e* $\mathrm{Var}X$.

2) Siano $X_1, X_2, \ldots$ v.a. indipendenti ciascuna con funzione di distribuzione data da (0.1) e sia $W_n = \sum_{k=1}^{n}(X_k)^2$. Dimostrare che $\frac{1}{n}W_n$ converge quasi certamente e calcolarne il limite.

Soluzione:

1) X vale -1 con prob. $1/4$, vale 0 con prob. $1/4$ e vale 1 con prob. $1/2$. Quindi il suo valo medio è $\mu := \mathbb{E}X = -1/4 + 1/2 = 1/4$. Inoltre X^2 vale 0 con prob. $1/4$ e vale 1 con prob. $3/4$ quindi $\mathbb{E}(X^2) = 3/4$. La varianza allora vale $\sigma^2 := 3/4 - 1/16 = 11/16$.

2) Consideriamo $Y_k = X_k^2$. Si tratta di v.a. indipendenti e identicamente distribuite con media $\sigma^2 + \mu^2 = 3/4$. Quindi, ripetendo l'argomento standard (Disuguaglianza di Markov + momento quarto + Borel–Cantelli 1) si ha $\frac{1}{n}W_n \to 3/4$.

Esercizio 3. *Sia $p > 1$ e sia X una v.a. tale che $\|X\|_p := (\mathbb{E}[|X|^p])^{\frac{1}{p}} < \infty$. Utilizzando la disuguaglianza di Hölder, mostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ si ha*

$$\mathbb{E}|X| \leqslant \varepsilon + \|X\|_p \, \mathbb{P}(|X| > \varepsilon)^{\frac{p-1}{p}} \, . \tag{0.2}$$

Soluzione: Osserviamo che, se $E = \{|X| > \varepsilon\}$ allora

$$\mathbb{E}|X| = \mathbb{E}\left[|X| \, 1_E\right] + \mathbb{E}\left[|X| \, 1_{E^c}\right] \, . \tag{0.3}$$

Il secondo termine nella (0.3) è stimato con

$$\mathbb{E}\left[|X| \, 1_{E^c}\right] \leqslant \varepsilon \, \mathbb{P}(E^c) \leqslant \varepsilon \, .$$

Infatti, $E^c = \{|X| \leqslant \varepsilon\}$ e possiamo stimare $|X| \, 1_{E^c} \leqslant \varepsilon \, 1_{E^c}$ puntualmente.

Il primo termine nella (0.3) è stimato con Hölder, se $\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}$

$$\mathbb{E}\left[|X| \, 1_E\right] \leqslant \|X\|_p \, \|1_E\|_q = \|X\|_p \, \mathbb{P}(|X| > \varepsilon)^{\frac{p-1}{p}} \, .$$

Esercizio 4. *Enunciare e dimostrare i due lemmi di Borel–Cantelli.*

Esercizio 5. *Siano* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *i.i.d. esponenziali di parametro* $\lambda > 0$*. Sia* a_n *una successione crescente e non–negativa. Mostrare che, per ogni* $\lambda > 0$ *si ha*

$$\mathbb{P}\left[\frac{X_n}{a_n\,\log n} \to 0\right] = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad a_n \to \infty\,.$$

Soluzione: Sia $Y_n := X_n/(a_n \log n)$. Abbiamo

$$\mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n > \varepsilon\, a_n\, \log n) = n^{-\varepsilon\,\lambda\,a_n}\,, \tag{0.4}$$

Supponiamo che $a_n \to \infty$. Allora, dalla (0.4) segue che $\mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon)$ è sommabile su $n \in \mathbb{N}$ per ogni $\varepsilon > 0$ e $\lambda > 0$ fissati. Per il primo Lemma di Borel–Cantelli si ha $Y_n \to 0$ quasi certamente.

Supponiamo ora che $Y_n \to 0$, $\mathbb{P}$–q.c. Allora per il secondo Lemma di Borel–Cantelli (le Y_n sono indipendenti) si deve avere $\sum_n \mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon) < \infty$ per ogni $\varepsilon > 0$ (altrimenti l'evento $\{|Y_n| > \varepsilon,\ \text{i.o.}\}$ avrebbe probabilità 1). Ma la (0.4) mostra che per avere probabilità sommabili si deve avere $a_n \to \infty$. Infatti, se avessimo $a_n \leqslant C$, troveremmo (per qualunque $\lambda > 0$) un $\varepsilon > 0$ cosi' piccolo (basta $\varepsilon = 1/(C\,\lambda)$) che

$$\sum_n \mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon) \geqslant \sum_n n^{-\varepsilon\,\lambda\,C} = +\infty\,.$$

Poiché assumiamo a_n crescente, se a_n non ha limite superiore si deve avere necessariamente $a_n \to \infty$.

Esercizio 6. *Siano* $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *v.a. indipendenti tali che*

$$Y_n = \begin{cases} 0 & \textit{con prob. } p_n \\ 1 & \textit{con prob. } 1-2p_n \\ 2 & \textit{con prob. } p_n \end{cases} \tag{0.5}$$

dove $p_n \in (0,1/2)$ *e* $p_n \to 0$, $n \to \infty$. *Sia*

$$Z_n = \prod_{k=1}^{n} Y_k \,.$$

1) Calcolare $\mathbb{E}Z_n$
2) Mostrare che $\lim_{n\to\infty} Z_n = 0$, $\mathbb{P}$*–q.c. se e solo se*

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \infty \,.$$

3) Discutere la validità del lemma di Fatou e del suo inverso.

Soluzione:
1) Si ha $\mathbb{E}Y_n = 1$ per ogni n. Per l'indipendenza quindi

$$\mathbb{E}Z_n = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}Y_n = 1 \,.$$

2) Notiamo che l'evento $\{Z_n \to 0\}$ coincide con $E = \cup_n E_n$, dove

$$E_n := \{Z_n = 0\} \,.$$

Sia $\pi_n = \mathbb{P}(E_n)$. Poiché $E_n \subset E_{n+1}$ per ogni n si ha $\mathbb{P}(E) = \lim_{n\to\infty} \pi_n$. Allora $\mathbb{P}(E) = 1$ se e solo se $\pi_n \to 1$ ovvero se e solo se $\mathbb{P}(E_n^c) \to 0$.

Osserviamo che $E_n^c = \{Z_n \neq 0\}$ coincide l'evento $\{Y_k \neq 0\,,\ \forall k = 1,\dots,n\}$. Quindi

$$\mathbb{P}(E_n^c) = (1-p_1)(1-p_2)\cdots(1-p_n) \,.$$

Ora, passando ai logaritmi si ha

$$\lim_{n\to\infty} (1-p_1)(1-p_2)\cdots(1-p_n) = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \log(1-p_k) = -\infty \,.$$

Usando le disuguaglianze elementari

$$-2x \leqslant \log(1-x) \leqslant -x\,, \quad x \in [0,\frac{1}{2}]\,,$$

si vede allora che la condizione $\mathbb{P}(E_n^c) \to 0$ è equivalente a $\sum_k p_k = +\infty$.

3) Se $\sum_n p_n = +\infty$ abbiamo dunque $Z_n \to 0$ q.c. ma per il punto 1) sappiamo che $\mathbb{E}Z_n = 1$ per ogni n. Questo non è in contraddizione con il Lemma di Fatou – che è sempre valido. Il lemma di Fatou inverso al contrario non è valido poiché la Z_n non è dominata (uniformemente in n) da una funzione integrabile.