Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2013-14, I semestre
9 gennaio, 2014

CP410: Esame 1, 9 gennaio 2014

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nome:____

1. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ lo spazio di probabilità $([0,1], \mathcal{B}, \mathrm{Leb})$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia X_n la variabile aleatoria definita da
$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in (1/n, 1] \\ -1 & \text{se } \omega \in [0, 1/n] \end{cases}$$
   (a) Descrivere la piú piccola sigma algebra $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{B}$ tale che X_n è $\mathcal{G}_n$-misurabile.
   (b) Mostrare che l'evento $\{X_n = -1, \text{ i.o.}\}$ ha probabilità zero.
   (c) Sia $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n = 1\}$. Mostrare che τ è $\mathcal{B}$-misurabile e che $\mathbb{E}[\tau] = +\infty$.

Soluzione: (a). Sia $E_n = (1/n, 1]$, e $E_n^c = [0, 1/n]$. Essendo $X_n = 1_{E_n} - 1_{E_n^c} = 2\,1_{E_n} - 1$, si ha $\mathcal{G}_n = \sigma(E_n) = \{[0,1], \varnothing, E_n, E_n^c\}$.

(b). Se $\omega \in (0,1]$, allora $X_n(\omega) = 1$ per n abbastanza grande. Se $\omega = 0$ allora $X_n(\omega) = -1$ per ogni n. Notiamo che per ogni $\omega \in \Omega_0 = (0,1]$, $X_n(\omega)$ vale -1 solo per un numero finito (dipendente da ω) di indici n. Dunque $X_n(\omega)$ vale -1 infinite volte se e solo se $\omega = 0$, ossia $\{X_n = -1, \text{ i.o.}\} = \Omega \setminus \Omega_0 = \{0\}$. Ne segue che
$$\mathbb{P}(\{X_n = -1, \text{ i.o.}\}) = \mathbb{P}(\Omega \setminus \Omega_0) = 0.$$
Notiamo, per inciso, che qui non si può usare il primo lemma di BC per ottenere il risultato precedente poiché $\sum_n \mathbb{P}(\{X_n = -1\}) = \sum_n \frac{1}{n} = +\infty$.

(c). Notiamo che $\tau = 1$ non è possibile, e che $\tau(\omega) = k$, $k \geqslant 2$, se e solo se $X_k(\omega) = 1$ e $X_{k-1}(\omega) = -1$, che equivale a $\omega \in (1/k, 1/(k-1)]$. Quindi τ è misurabile e
$$\mathbb{P}(\tau = k) = \mathbb{P}((1/k, 1/(k-1)]) = \frac{1}{k(k-1)}, \qquad k = 2, 3, \dots.$$
Dal punto (b) sappiamo che τ è finito quasi certamente. Inoltre
$$\mathbb{E}[\tau] = \sum_{k=2}^{\infty} k \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k-1} = +\infty.$$

Nome:____

2. Enunciare e dimostrare il Teorema di Optional Stopping per martingale.

Nome:____

3. Siano $\{X_n\}$ variabili aleatorie i.i.d. con media nulla e varianza $\sigma^2 > 0$. Sia

$$\phi_n(\alpha) = \mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i \leqslant \alpha n\Big).$$

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, mostrare che $\phi_n(\alpha)$ converge per $n \to \infty$ e calcolarne il limite.

Soluzione:
Ricordiamo che la legge dei grandi numeri stabilisce che $\frac{1}{n}\sum_{i \leqslant n} X_i \to \mathbb{E}[X_i] = 0$, $\mathbb{P}$-q.c. e dunque anche in probabilità. Ne segue che $\phi_n(\alpha) \to 0$ se $\alpha < 0$ e $\phi_n(\alpha) \to 1$ se $\alpha > 0$. Per trattare il caso $\alpha = 0$ usiamo il teorema del limite centrale. Sia $Z_n = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 n}}\sum_{i \leqslant n} X_i$. Sappiamo che Z_n converge in distribuzione alla v.a. $N(0,1)$. Ne segue che

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(0) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n \leqslant 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-z^2/2} dz = \frac{1}{2}.$$

In conclusione,

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(\alpha) = \begin{cases} 0 & \alpha < 0 \\ \frac{1}{2} & \alpha = 0 \\ 1 & \alpha > 0 \end{cases}$$

Nome:____

4. Siano Y_i, $i = 1, 2, \ldots$, variabili aleatorie indipendenti con distribuzione Poisson di parametro $\lambda = 1$. Sia $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ e ponendo $\alpha = e - 1$ si definisca
$$X_n = e^{S_n - \alpha n}.$$
   (a) Dire se X_n converge q.c.
   (b) Calcolare $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n > e^{-b\,n})$, per $b \in (0, \alpha - 1)$.
   (c) Dire se X_n converge in L^1

Soluzione: (a). Ricordiamo che per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha $\mathbb{E}[e^{tY_1}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} e^{tk} \lambda^k / k! = e^{\lambda(e^t - 1)}$, dove Y_1 è la v.a. di Poisson di parametro λ. In particolare, con $\lambda = 1$, $\mathbb{E}[e^{Y_1}] = e^{(e-1)} = e^{\alpha}$, ossia $\mathbb{E}[e^{Y_1 - \alpha}] = 1$. Scrivendo
$$X_n = \prod_{i=1}^n e^{Y_i - \alpha},$$
abbiamo che X_n è prodotto di n v.a. nonnegative indipendenti di media 1. Pertanto X_n è una martingala rispetto alla filtrazione naturale $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$. Inoltre X_n è limitata in L^1 essendo $\mathbb{E}[|X_n|] = \mathbb{E}[X_n] = 1$. Allora per il teorema di convergenza di Doob, esiste una v.a. X_∞ tale che $\mathbb{P}$-q.c. si ha $\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty$.

(b). Per ogni $b \in \mathbb{R}$ si ha
$$\mathbb{P}(X_n > e^{-bn}) = \mathbb{P}(S_n > (\alpha - b)n).$$
Per la legge dei grandi numeri abbiamo $S_n/n \to \lambda = 1$ $\mathbb{P}$-q.c. In particolare, si ha
$$\mathbb{P}(S_n > (1 + \varepsilon)n) \to 0,$$
per ogni $\varepsilon > 0$. Allora, se $b \in (0, \alpha - 1)$, si ha $\alpha - b = 1 + \varepsilon$ per qualche $\varepsilon > 0$. Ne segue che, per ogni $b \in (0, \alpha - 1)$,
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n > e^{-bn}) = 0.$$

(c). Il punto (b) implica in particolare che per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n > \varepsilon) = 0$. Allora $X_n \to 0$ in probabilità, e necessariamente $X_\infty = 0$ $\mathbb{P}$-q.c. In conclusione, X_n non converge in L^1 poiché $1 = \mathbb{E}[X_n] \not\to \mathbb{E}[X_\infty] = 0$.

Nome:____

5. Enunciare e dimostrare i due lemmi di Borel-Cantelli.

Nome:____________________________________

6. Siano $\{X_n\}$ e $\{Y_n\}$ due successioni indipendenti di variabili aleatorie su un'opportuno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, tali che le $\{X_n\}$ sono i.i.d. con $X_k = \pm 1$ con probabilità $1/2$ e le $\{Y_n\}$ sono variabili i.i.d. con momento secondo $\mathbb{E}[Y_n^2] = 1$. Sia $S_n = \sum_{k=1}^n X_k Y_k$, con $S_0 = 0$.

   (a) Fornire un esempio di filtrazione $\{\mathcal{F}_n\}$ tale che S_n è una martingala rispetto a $\{\mathcal{F}_n\}$.

   (b) Dimostrare che per ogni $c \in \mathbb{R}$ fissato $\frac{1}{\sqrt{n}}(S_n + c)$ converge in distribuzione alla normale standard $N(0,1)$.

   (c) Dimostrare che per ogni $k \in \mathbb{N}$ fissato $\frac{1}{\sqrt{n}} S_{n+k}$ converge in distribuzione alla normale standard $N(0,1)$.

Soluzione: (a). Notiamo che $Z_k = X_k Y_k$ sono variabili i.i.d. e usando $\mathbb{E}[X_k] = 0$ si vede che Z_k ha media nulla:

$$\mathbb{E}[Z_k] = \mathbb{E}[X_k]\mathbb{E}[Y_k] = 0.$$

Pertanto ponendo $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \ldots, Z_n)$ si ottiene una filtrazione tale che S_n è una martingala rispetto a $\{\mathcal{F}_n\}$. Un'altra scelta possibile è $\mathcal{F}'_n = \sigma(X_1, Y_1, \ldots, X_n, Y_n)$.

(b). La v.a. Z_k ha media zero e varianza

$$\sigma^2 = \mathbb{E}[Z_k^2] = \mathbb{E}[X_k^2]\mathbb{E}[Y_k^2] = \mathbb{E}[Y_k^2] = 1.$$

Allora per il teorema del limite centrale sappiamo che la funzione caratteristica di $S_n/\sqrt{n\sigma^2}$ soddisfa

$$\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n\sigma^2}}}(\theta) \to e^{\frac{1}{2}\theta^2}, \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

Dunque per ogni $c \in \mathbb{R}$

$$\varphi_{\frac{S_n+c}{\sqrt{n\sigma^2}}}(\theta) = \varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n\sigma^2}}}(\theta)\, e^{i\frac{c\,\theta}{\sqrt{n\sigma^2}}} \to e^{\frac{1}{2}\theta^2}, \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

Allora possiamo dedurre che per ogni $c \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{\sqrt{n}}(S_n + c)$ converge in distribuzione alla normale standard $N(0,1)$.

(c). Scriviamo $\tilde{S}_n = \sum_{j=k+1}^{k+n} Z_k$ e notiamo che $S_{n+k} = S_k + \tilde{S}_n$, che S_k e $\tilde{S}_n$ sono indipendenti e che $\tilde{S}_n$ ha la stessa distribuzione di S_n. Allora $\varphi_{\frac{\tilde{S}_n}{\sqrt{n\sigma^2}}}(\theta) = \varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n\sigma^2}}}(\theta)$, e usando l'indipendenza si ha

$$\varphi_{\frac{S_{n+k}}{\sqrt{n\sigma^2}}}(\theta) = \varphi_{\frac{\tilde{S}_n}{\sqrt{n\sigma^2}}}(\theta)\ \varphi_{\frac{S_k}{\sqrt{n\sigma^2}}}(\theta) = \varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n\sigma^2}}}(\theta)\ \varphi_{\frac{S_k}{\sqrt{n\sigma^2}}}(\theta).$$

Poiché sappiamo che $\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n\sigma^2}}}(\theta) \to e^{\frac{1}{2}\theta^2}$, è sufficiente mostrare che per ogni k, si ha

$$\varphi_{\frac{S_k}{\sqrt{n\sigma^2}}}(\theta) \to 1, \qquad \theta \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Usiamo l'argomento che si usa per mostrare che la convergenza in probabilità implica la convergenza in distribuzione. Sia $\varepsilon > 0$ e sia $E_\varepsilon = \{\frac{S_k}{\sqrt{n\sigma^2}} > \varepsilon\}$. E' immediato verificare che $\mathbb{P}(E_\varepsilon) \to 0$, $n \to \infty$. Allora usando $e^{i\theta a} - 1 = O(|a|)$, per $\theta \in \mathbb{R}$ fissato e $|a| \to 0$, si ha

$$|\varphi_{\frac{S_k}{\sqrt{n\sigma^2}}}(\theta) - 1| \leqslant \mathbb{P}(E_\varepsilon) + \mathbb{E}(|\exp(i\theta S_k/\sqrt{n\sigma^2}) - 1|;\ E_\varepsilon^c) \leqslant \mathbb{P}(E_\varepsilon) + O(\varepsilon).$$

Facendo il limite $n \to \infty$, e poi lasciando andare ε a zero si ottiene (1).