Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2013-14, I semestre
30 gennaio, 2014

# CP410: Esame 2, 30 gennaio 2014

## Testo e soluzione

| | |
|---|---|
| Cognome | |
| Nome | |
| Matricola | |
| Firma | |

Nome:______________________________________

1. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $X_n$ la variabile aleatoria con densità di probabilità

$$f_n(t) = nt^{n-1} 1_{t \in [0,1]}$$

   (a) Dire se $X_n$ converge in probabilità

   (b) Dire se $X_n$ converge in distribuzione

   (c) E' possibile realizzare la successione di variabili aleatorie $X_n$ sullo spazio di probabilità $([0,1], \mathcal{B}, \text{Leb})$ in maniera tale che $X_n(\omega)$ converge per quasi ogni $\omega \in [0,1]$ ?

**Soluzione**: (a). Per $n$ grandi la densità $f_n$ tende a rapidamente a zero a meno che $t$ non sia molto vicino a 1. Quindi è naturale investigare la convergenza di $X_n$ a 1. La variabile $1 - X_n$ prende valori positivi, e per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$\mathbb{P}(1 - X_n > \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n < 1 - \varepsilon) = \int_0^{1-\varepsilon} nt^{n-1} dt = (1-\varepsilon)^n \to 0.$$

Dunque $1 - X_n$ tende a zero in prob. e quindi $X_n \to 1$ in prob.

(b). Ricordiamo che convergenza in prob. implica convergenza in distribuzione. Quindi $X_n$ converge in distribuzione alla costante 1.

(b). Per realizzare esplicitamente la $X_n$ sullo spazio di prob. $([0,1], \mathcal{B}, \text{Leb})$ possiamo prendere

$$X_n(\omega) = \omega^{1/n}, \qquad \omega \in [0,1].$$

Infatti la funzione di distribuzione soddisfa

$$\mathbb{P}(X_n \leqslant x) = \mathbb{P}(\omega^{1/n} \leqslant x) = \mathbb{P}(\omega \leqslant x^n) = x^n = \int_0^x f_n(t)dt, \qquad x \in [0,1].$$

Per ogni $\omega \in \Omega_0 = (0,1]$ abbiamo $X_n(\omega) = \omega^{1/n} \to 1$. Inoltre $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ e dunque abbiamo che $X_n(\omega) \to 1$ per quasi ogni $\omega \in [0,1]$.

Nome:________________________________________

2. Consideriamo una playlist di dieci canzoni numerate da 0 a 9. A ogni passo viene suonata una canzone scelta uniformemente a caso tra le dieci. Sia $\tau$ il numero di canzoni suonate quando per la prima volta si è ascoltata la sequenza di canzoni 0990.

   (a) Mostrare che $\mathbb{E}[\tau] < \infty$

   (b) Calcolare $\mathbb{E}[\tau]$.

**Soluzione**: Considerando blocchi di 4 canzoni ciascuno si vede che $\tau$ è dominato dal $4\sigma$ dove $\sigma$ è il numero di blocchi necessario per avere un blocco pari a 0990 per la prima volta. La variabile $\sigma$ è una geometrica e dunque $\mathbb{E}[\sigma] = 1/p = 10^4$, dove $p$ è la probabilità che un blocco sia pari a 0990. Allora $\mathbb{E}[\tau] \leqslant 4\mathbb{E}[\sigma] < \infty$.
Il risultato precedente permette di applicare il teorema di optional stopping. Utilizzando l'usuale argomento di martingala (vedere raccolta di esercizi svolti con martingale), si ottiene che $\mathbb{E}[\tau] = 10^4 + 10$.

Nome:________________________________________

3. Sia $X_n$ una variabile esponenziale di parametro $\lambda = n$ e sia $Y_n$ una variabile aleatoria che prende il valore $+1$ con probabilità $\frac{1}{2} + \frac{1}{n}$ e il valore $-1$ con probabilità $\frac{1}{2} - \frac{1}{n}$. Assumendo indipendenza tra $X_n$ e $Y_n$, mostrare che la variabile aleatoria $Z_n = (1 + X_n)Y_n$ converge in distribuzione per $n \to \infty$ e descriverne il limite.

**Soluzione**: Usiamo la funzione caratteristica

$$\varphi_{Z_n}(\theta) = \mathbb{E}[e^{i\theta(1+X_n)Y_n}].$$

Grazie all'indipendenza possiamo integrare

$$\begin{aligned}\varphi_{Z_n}(\theta) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) \mathbb{E}[e^{i\theta(1+X_n)}] + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) \mathbb{E}[e^{-i\theta(1+X_n)}] \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) e^{i\theta}\varphi_{X_n}(\theta) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) e^{-i\theta}\varphi_{X_n}(-\theta).\end{aligned}$$

La variabile esponenziale di parametro $\lambda$ ha funzione caratteristica pari a $\lambda/(\lambda - i\theta)$, e dunque $\varphi_{X_n}(\theta) = 1/(1 - i(\theta/n)) \to 1$ per $n \to \infty$. Allora

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{Z_n}(\theta) = \frac{1}{2}\, e^{i\theta} + \frac{1}{2}\, e^{-i\theta}$$

In conclusione, $Z_n$ converge in distribuzione alla variabile $Z$ che vale 1 con probabilità $\frac{1}{2}$ e $-1$ con probabilità $\frac{1}{2}$.

Nome:______________________________________

4. Sia $X$ una v.a. su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, tale che $\mathbb{P}(|X| > t) = t^{-\alpha}$, per ogni $t \geqslant 1$, dove $\alpha > 1$ è fissato. Sia $\{\mathcal{F}_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ una famiglia non decrescente di sotto $\sigma$-algebre di $\mathcal{F}$ e sia $M_n = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]$.
   (a) Mostrare che $M_n$ è una martingala.
   (b) Mostrare che $M_n$ è limitata in $L^p$ per ogni $p \in [1, \alpha)$.

**Soluzione**: La proprietà di martingala segue dalla proprietà della torre per il valore atteso condizionato. Inoltre, notiamo che $X \in L^p$ se e solo se $p < \alpha$. Per esempio questo si può vedere tramite

$$\mathbb{E}[|X|^p] = \int_0^\infty \mathbb{P}(|X|^p > t)dt = \int_0^1 dt + \int_1^\infty t^{-\frac{\alpha}{p}}\, dt,$$

dove abbiamo usato il fatto che per definizione $\mathbb{P}(|X| > t) = 1$ per ogni $t \in [0, 1]$. L'espressione precedente è finita se e solo se $p < \alpha$. Usando la disuguaglianza di Jensen, per $p \geqslant 1$ si ottiene

$$\mathbb{E}[|M_n|^p] = \mathbb{E}[|\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]|^p] \leqslant \mathbb{E}[\mathbb{E}[|X|^p|\mathcal{F}_n]] = \mathbb{E}[|X|^p].$$

Allora se $p < \alpha$ si ha $\mathbb{E}[|M_n|^p] \leqslant \mathbb{E}[|X|^p] < \infty$.

Nome:________________________________________

5. Discutere con esempi e cenni di dimostrazion la legge debole e la legge forte dei grandi numeri.

Nome:________________________________________

6. Siano $Z_i$, variabili aleatorie i.i.d. ciascuna con funzione di distribuzione

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t \leqslant 1 \\ 1 - t^{-2} & t > 1 \end{cases}$$

(a) Calcolare i valori attesi $\nu = \mathbb{E}[Z_1]$ e $\mu = \mathbb{E}[\log(Z_1)]$.

(b) Sia $X_n = \prod_{i=1}^n Z_i$. Mostrare che la successione $X_n^{1/n}$ converge q.c. e calcolarne il limite.

(c) Mostrare che la successione $2^{-n} X_n$ converge q.c. e calcolarne il limite.

**Soluzione**: (a). Differenziando la funzione di distribuzione $F(t) = \mathbb{P}(Z_1 \leqslant t)$ si ha che $Z_1$ ha densità di probabilità

$$f(z) = 2z^{-3} 1_{\{z \geqslant 1\}}.$$

Dunque

$$\nu = \mathbb{E}[Z_1] = 2 \int_1^\infty z^{-2} dz = 2.$$

Inoltre $\log(Z_1)$ ha media

$$\mu = \mathbb{E}[\log(Z_1)] = 2 \int_1^\infty \log(z) z^{-3} dz = \int_1^\infty z^{-3} dz = \frac{1}{2}.$$

(b). Notiamo che

$$\log(X_n^{1/n}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(Z_i).$$

Scriviamo $Y_i = \log(Z_i)$ e $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$, in modo che $X_n^{1/n} = e^{S_n/n}$. Le $Y_i$ sono variabili i.i.d. nonnegative, con media $\mu$. La legge dei grandi numeri forte stabilisce che $\frac{1}{n} S_n \to \mu$ $\mathbb{P}$-q.c. e quindi $X_n^{1/n} \to e^\mu$, $\mathbb{P}$-q.c.

(c). Essendo $\nu = 2$, notiamo che $M_n = 2^{-n} X_n$ è prodotto di $(Z_i/2)$, $i = 1, \ldots, n$, variabili i.i.d. nonnegative con media 1. Quindi $M_n$ è una martingala limitata in $L^1$ e per il teorema di convergenza si ha $M_n \to M_\infty$ $\mathbb{P}$-q.c. per qualche v.a. $M_\infty$. Per il punto (b) deve valere $M_n^{1/n} \to e^{1/2}/2$ $\mathbb{P}$-q.c. e dunque, essendo $e^{1/2}/2 < 1$, si ha $M_n \to M_\infty = 0$ $\mathbb{P}$-q.c.