Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2013-14, I semestre
6 giugno, 2014

CP410: Esame 3, 6 giugno 2014

Testo e soluzione

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nome:____

1. Sia X la variabile aleatoria esponenziale di parametro 1.

   (a) Descrivere uno spazio di probabilità su cui è possibile realizzare la variabile X e descrivere la funzione misurabile associata.

   (b) Dimostrare che per ogni $\lambda \in (-\infty, 1)$ si ha

$$\log \mathbb{E}[e^{\lambda X}] \geqslant \lambda.$$

Soluzione: La variabile X ha funzione di distribuzione

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leqslant t) = \int_0^t e^{-s} ds = 1 - e^{-t}.$$

Una possibilità è quella di scegliere $\Omega = \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\mathcal{F}$ i Boreliani di $\mathbb{R}_+$ e $\mathbb{P}$ la misura di probabilità su $\mathbb{R}_+$ con densità $f(t) = e^{-t} 1_{t \geqslant 0}$ rispetto alla misura di Lebesgue. In questo caso la funzione misurabile associata alla variabile X è la funzione $X(\omega) = \omega$, per $\omega \in \mathbb{R}_+$. Un'altra possibilità è scegliere $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F}$ i Boreliani di $[0, 1]$ e $\mathbb{P} = \text{Leb}$ la misura di Lebesgue su $[0, 1]$. In questo altro caso la funzione misurabile associata alla variabile X è la funzione $X(\omega) = -\log(\omega)$. Infatti

$$\mathbb{P}(X \leqslant t) = \text{Leb}(\omega \in [0, 1] : \, -\log(\omega) \leqslant t) = \text{Leb}(\omega \in [0, 1] : \, \omega \geqslant e^{-t}) = 1 - e^{-t}.$$

Notiamo che per ogni $\lambda \in (-\infty, 1)$, il valore atteso

$$\mathbb{E}[e^{\lambda X}] = \int_0^1 e^{\lambda x} e^{-x} dx = (1 - \lambda)^{-1}$$

è ben definito. Per la disuguaglianza di Jensen abbiamo $\mathbb{E}[e^{\lambda X}] \geqslant e^{\lambda \mathbb{E}[X]} = e^{\lambda}$. Passando ai logaritmi si ottiene la tesi. In particolare, otteniamo la disuguaglianza

$$(1 - \lambda)^{-1} \geqslant e^{\lambda},$$

per ogni $\lambda \in (-\infty, 1)$.

Nome:____

2. Sia $\mathbb{P}$ la misura di probabilità uniforme sul disco

$$\mathbb{D} = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2 :\ \omega_1^2 + \omega_2^2 \leqslant 1\}.$$

Per $n \in \mathbb{N}$, sia $X_n(\omega) = 1_{E_n}(\omega)$ dove E_n è l'evento

$$E_n = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2 :\ \omega_1^2 + \omega_2^2 \leqslant \tfrac{1}{n^2}\}.$$

(a) Mostrare che $\lim_{n\to\infty} X_n = 0$, $\mathbb{P}$-quasi certamente

(b) Mostrare che $nX_n \to 0$ in L^p per ogni $p \in (0, 2)$.

Soluzione: Notiamo che E_n ha probab.

$$\mathbb{P}(E_n) = \frac{\mathrm{Area(E_n)}}{\mathrm{Area}(\mathbb{D})} = \frac{1}{n^2}.$$

Allora si ha $X_n = 1$ con probab. $1/n^2$ e $X_n = 0$ con probab. $1 - 1/n^2$. Per il primo lemma di Borel Cantelli dunque sappiamo che l'evento $\{X_n \neq 0,\ i.o.\}$ ha probabilità 0. In particolare, $\lim_{n\to\infty} X_n = 0$, $\mathbb{P}$-quasi certamente.
La stessa conclusione si può raggiungere senza invocare il lemma BC1. Infatti basta osservare che se $\omega \in \Omega_0 = \mathbb{D} \setminus \{0\}$ è fissato, allora esiste un $n_0 = n_0(\omega)$ tale che $X_n(\omega) = 0$ per ogni $n \geqslant n_0$. Inoltre $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$.

Sia ora $\phi_n = nX_n$. Vogliamo mostrare che $\mathbb{E}[|\phi_n|^p] \to 0$ per $p \in (0, 2)$. Si ha

$$\mathbb{E}[|\phi_n|^p] = n^p \mathbb{P}(E_n) = n^{p-2} \to 0.$$

Nome:______________________________________

3. Uno scalatore, ad ogni unità di tempo indipendentemente, resta fermo con probab. 1/4, fa un passo in avanti di mezzo metro con probab. 1/2 e fa un passo in avanti di un metro con probab. 1/4. Dire quanto tempo in media impiega a percorrere 500 metri se l'unità di tempo è 3 secondi.

Soluzione: Siano Z_i v.a. indipendenti ciascuna con distribuzione

$$Z_i = \begin{cases} 0 & \text{probab. } \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \text{probab. } \frac{1}{2} \\ 1 & \text{probab. } \frac{1}{4} \end{cases}$$

Dopo n unità di tempo lo scalatore ha percorso $S_n = \sum_{i=1}^n Z_i$ metri. La media di Z_i vale $\mu = \frac{1}{2}$, e dunque

$$M_n = S_n - \mu n$$

è una martingala. Sia τ il tempo necessario a raggiungere 500 metri. Con gli argomenti usuali si ha $\mathbb{E}[\tau] < \infty$. Possiamo allora applicare il teorema di optional stopping per ottenere

$$\mathbb{E}[M_\tau] = 0.$$

Poiché $S_\tau = 500$, si ha

$$\mu \mathbb{E}[\tau] = 500.$$

Pertanto $\mathbb{E}[\tau] = 1000$ unità di tempo. Se l'unità di tempo vale 3 secondi si ha $\mathbb{E}[\tau] = 3000$ secondi.

Nome:____________________________________

4. Siano U_i, $i = 1, \dots, n$, variabili aleatorie indipendenti con distribuzione uniforme in $[0, 1]$. Per $\lambda > 0$ fissato sia $Y_0^\lambda = 1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$Y_n^\lambda = \exp\big(- \lambda n + \textstyle\sum_{i=1}^n U_i \big).$$

   (a) Trovare un valore di λ tale che $\{Y_n^\lambda,\ n = 0, 1, \dots\}$ è una martingala.

   (b) Dire se la martingala trovata converge quasi certamente.

   (c) Mostrare che quasi certamente si ha $Y_n^\lambda \to 0$ per $n \to \infty$, per ogni $\lambda > \frac{1}{2}$ fissato.

Soluzione: La Y_n^λ è della forma $\prod_{i=1}^n X_i$ con X_i v.a. non-negative indipendenti. Allora basta trovare $\lambda > 0$ tale che $\mathbb{E}[X_i] = 1$. Con $X_i = e^{-\lambda + U_i}$ si trova

$$\lambda = \log \mathbb{E}[e^{U_i}] = \log(e - 1).$$

Con questa scelta di λ abbiamo che Y_n^λ è una martingala limitata in L^1. Per il teorema di Doob sappiamo che la Y_n^λ converge quasi certamente.
Infine osserviamo che per ogni $\lambda > \frac{1}{2}$ fissato si ha

$$Y_n^\lambda \to 0$$

quasi certamente. Infatti, quasi certamente $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i \to \frac{1}{2}$ per la legge dei grandi numeri forte. Ne segue che q.c. $\lambda n - \sum_{i=1}^n U_i \to \infty$, $n \to \infty$, quasi certamente per $\lambda > \frac{1}{2}$, quindi $Y_n^\lambda \to 0$ q.c. per $n \to \infty$.

Osserviamo che essendo $\log(e - 1) > 0.5$, si ha che la martingala $Y_n^{\log(e-1)}$ converge q.c. a zero, pur avendo valore atteso costante pari a 1.

Nome:______________________________________

5. Discutere con esempi e cenni di dimostrazione il teorema del limite centrale

Nome:__________________________________

6. Sia $k \in \mathbb{N}$ fissato e siano Z_i variabili aleatorie indipendenti con distribuzione

$$Z_i = \begin{cases} 0 & \text{probab. } 1 - \frac{1}{k} \\ 1 & \text{probab. } \frac{1}{2k} \\ -1 & \text{probab. } \frac{1}{2k} \end{cases}$$

Sia τ_k il minimo $n \in \mathbb{N}$ tale che $|S_n| \geqslant k$, dove $S_n = \sum_{i=1}^n Z_i$.

(a) Mostrare che $\mathbb{E}[\tau_k] < \infty$

(b) Calcolare $\mathbb{E}[\tau_k]$ in funzione di k.

Soluzione:
Sia $S_n = \sum_{i=1}^n Z_i$. Osserviamo che S_n è una martingala e che $S_n^2 - \frac{n}{k}$ è una martingala. Con gli argomenti usuali otteniamo che τ_k è dominato da un multiplo di una geometrica e pertanto $\mathbb{E}[\tau_k] < \infty$. Allora possiamo applicare il teorema di optional stopping e ottenere

$$\mathbb{E}[S_{\tau_k}^2] = \frac{1}{k}\mathbb{E}[\tau_k].$$

Essendo $S_{\tau_k}^2 = k^2$, si ottiene $\mathbb{E}[\tau_k] = k^3$.

Nome:______________________________________