Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2013-14, I semestre
31 ottobre, 2013

CP410: Esonero 1, 31 ottobre 2013

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nome:____

1. Fare un esempio di successione di variabili aleatorie $\{X_n\}$ tale che $\lim_{n\to\infty} X_n = 0$ quasi certamente e $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = +\infty$.

Soluzione: Prendiamo, per esempio, $X_n = n^3$ con probabilità $\frac{1}{n^2}$ e $X_n = 0$ con probabilità $1 - \frac{1}{n^2}$. Allora $\mathbb{E}[X_n] = n^3/n^2 = n$. D'altra parte il primo lemma di Borel-Cantelli implica che quasi certamente $X_n = 0$ definitivamente. Infatti $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X_n \neq 0) = \sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-2} < \infty$ e quindi $\{X_n \neq 0, \text{ i.o.}\}$ ha probabilità zero. In conclusione, $\mathbb{E}[X_n] \to \infty$ e $X_n \to 0$ quasi certamente.

Nome:____

2. Siano X e Y due variabili aleatorie esponenziali di parametro 1, non necessariamente indipendenti, e sia $Z = 2^{-(X+Y)}$. Mostrare che

$$\frac{1}{4} \leqslant \mathbb{E}[Z] \leqslant \frac{1}{1 + 2\log 2}.$$

Soluzione: La funzione $x \mapsto 2^{-x}$ è convessa, quindi per la disuguaglianza di Jensen si ha

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[2^{-(X+Y)}] \geqslant 2^{-\mathbb{E}[X+Y]} = 2^{-2} = \frac{1}{4},$$

dove usiamo $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = 2\mathbb{E}[X] = 2$.

D'altra parte per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz abbiamo

$$\mathbb{E}[Z] \leqslant \mathbb{E}[2^{-2X}]^{\frac{1}{2}}\mathbb{E}[2^{-2Y}]^{\frac{1}{2}} = \mathbb{E}[2^{-2X}].$$

Essendo X esponenziale di parametro 1 possiamo calcolare

$$\mathbb{E}[2^{-2X}] = \int_0^\infty e^{-t}e^{-2t\log(2)}\,dt = \frac{1}{1 + 2\log(2)}.$$

Nota: se facciamo l'ipotesi che X e Y sono indipendenti allora si ha

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[2^{-(X+Y)}] = \mathbb{E}[2^{-X}]\mathbb{E}[2^{-Y}] = \mathbb{E}[2^{-X}]^2 = (1 + \log(2))^{-2}.$$

Nome:____

3. Siano $X_1, X_2, \ldots$ variabili aleatorie indipendenti tali che per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $X_n = 1$ con probabilità $1/n$ e $X_n = 0$ con probabilità $1 - 1/n$. Dimostrare che:
   (a) X_n tende a zero in probabilità;
   (b) la sotto-successione X_{n^2} tende a zero quasi certamente

Soluzione: Per $\varepsilon > 0$ si ha
$$\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}.$$
Quindi $X_n \to 0$ in probabilità.

Allo stesso modo si ottiene
$$\mathbb{P}(|X_{n^2}| > \varepsilon) = \mathbb{P}(X_{n^2} = 1) = \frac{1}{n^2}.$$
Pertanto per il primo lemma di Borel-Cantelli si ha
$$\mathbb{P}\left(|X_{n^2}| > \varepsilon, \text{ i.o.}\right) = 0.$$
Quindi, se $E_\varepsilon := \{\exists n_0 : \ |X_{n^2}| \leqslant \varepsilon, \ \forall n \geqslant n_0\}$ abbiamo dimostrato che $\mathbb{P}(E_\varepsilon) = 1$. Prendendo l'intersezione lungo la sequenza $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$, si ottiene che $\{\lim_{n\to\infty} X_{n^2} = 0\} = \cap_{k=1}^{\infty} E_{\varepsilon_k}$ ha probabilità 1, ossia
$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} X_{n^2} = 0\right) = 1.$$

Nome:____

4. Siano $Y_1, Y_2, \ldots$ variabili aleatorie indipendenti tali che per ogni n la Y_n ha funzione di distribuzione

$$F_{Y_n}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t^{1/n} & 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases}$$

   (a) Mostrare che Y_n tende a zero in probabilità, ma non quasi certamente.

   (b) Calcolare la probabilità dell'evento $\{\limsup_{n\to\infty} Y_n = 1\}$.

Soluzione: (a). La v.a. Y_n definita dalla funzione di distribuzione $F_{Y_n}(t) = \mathbb{P}(Y_n \leqslant t)$ soddisfa $0 \leqslant Y_n \leqslant 1$ con probabilità 1. Si ha

$$\mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon) = \mathbb{P}(Y_n > \varepsilon) = 1 - F_{Y_n}(\varepsilon) = 1 - \varepsilon^{1/n},$$

se $\varepsilon \in (0,1)$. Allora $\mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon) \to 0$, $n \to \infty$, per ogni $\varepsilon > 0$. Quindi Y_n tende a zero in probabilità. Mostriamo ora che non converge a zero q.c. Infatti, se Y_n tendesse a zero q.c. allora per il secondo lemma di Borel-Cantelli si avrebbe $\sum_n \mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon) < \infty$ per ogni $\varepsilon \in (0,1)$. Ma questo non è possibile essendo $\mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon) = 1 - \varepsilon^{1/n} = 1 - e^{\frac{1}{n}\log(\varepsilon)} = \frac{1}{n}\log(1/\varepsilon) + O(1/n^2)$.

(b). Poiché $Y_n \leqslant 1$, l'evento $\{\limsup_{n\to\infty} Y_n = 1\}$ equivale all'affermazione: $Y_n > 1 - \delta$ infinite volte, per ogni $\delta > 0$. Sappiamo che

$$\sum_n \mathbb{P}(Y_n > 1 - \delta) = \sum_n \left(1 - (1-\delta)^{1/n}\right).$$

L'espressione $1 - (1-\delta)^{1/n}$ vale $\frac{1}{n}\log[1/(1-\delta)] + O(1/n^2)$ e quindi la serie diverge. Allora per il secondo lemma di Borel-Cantelli si ha che per ogni $\delta > 0$ fissato, $\{Y_n > 1-\delta, \text{ i.o.}\}$ ha probabilità 1. Prendendo l'intersezione lungo la sequenza $\delta_k = 1/k$ si ottiene che $\{\limsup_{n\to\infty} Y_n = 1\} = \cap_{k=1}^{\infty}\{Y_n > 1 - \delta_k, \text{ i.o.}\}$, e quindi

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} Y_n = 1\right) = 1.$$

Nome:_______________________________

5. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ lo spazio di probabilità con $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F}$ i boreliani di $[0,1]$ e $\mathbb{P}$ la misura di Lebesgue su $[0,1]$. Sia $\mathcal{G}$ la piu' piccola σ-algebra contenente gli insiemi disgiunti $A_k := (1/(k+1), 1/k]$, $k = 1, 2, \ldots$. Sia $\alpha > 0$ e sia $X_\alpha : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ la variabile aleatoria definita da

$$X_\alpha(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha \mathbf{1}_{\{\omega \in A_k\}}.$$

Dimostrare che:

(a) X_α è $\mathcal{G}$-misurabile per ogni $\alpha > 0$;

(b) $X_\alpha \in L^2$ se e solo se $\alpha \in (0, 1/2)$;

(c) se $\alpha \in (0, 1/2)$, allora esiste successione di variabili aleatorie Y_n tale che: 1) Y_n è $\mathcal{G}$-misurabile per ogni n, 2) Y_n è limitata per ogni n, 3) vale $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[(X_\alpha - Y_n)^2] = 0$.

Soluzione: (a). Basta mostrare che per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha $\{\omega \in [0,1] : X_\alpha(\omega) \leqslant t\} \in \mathcal{G}$. Notiamo che $X_\alpha(0) = 0$ e che $\{0\} = [0,1] \setminus (0,1] \in \mathcal{G}$ essendo $(0,1] = \cup_{k=1}^{\infty} A_k$. Fissiamo $A_0 = \{0\}$ in modo che $[0,1] = \cup_{k=0}^{\infty} A_k$. Per definizione si ha che $X_\alpha(\omega) \leqslant t$ equivale a $\omega \in \cup_{j=0}^{\lfloor t^{1/\alpha} \rfloor} A_j$ dove $\lfloor t^{1/\alpha} \rfloor$ indica la parte intera di $t^{1/\alpha}$. Qualunque unione di A_j appartiene a $\mathcal{G}$ quindi X_α è $\mathcal{G}$-misurabile.

(b). Notiamo che $X_\alpha^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{2\alpha} \mathbf{1}_{\{\omega \in A_k\}}$. Per la convergenza monotona

$$\mathbb{E}[X_\alpha^2] = \sum_{k=1}^{\infty} k^{2\alpha}\, \mathbb{P}(A_k).$$

Essendo $\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)} \sim \frac{1}{k^2}$, la serie è sommabile se e solo se $2\alpha - 2 < -1$, che equivale a $\alpha < 1/2$.

(c). Fissiamo $\alpha \in (0, 1/2)$. Possiamo prendere, per esempio,

$$Y_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha \mathbf{1}_{\{\omega \in A_k\}}.$$

Con l'argomento precedente si vede che Y_n è $\mathcal{G}$-misurabile. Inoltre per ogni $n \in \mathbb{N}$ fissato, Y_n è limitata da n^α. Infine, $X_\alpha(\omega) - Y_n(\omega) = \sum_{k=n+1}^{\infty} k^\alpha \mathbf{1}_{\{\omega \in A_k\}}$, e quindi

$$\mathbb{E}[(X_\alpha - Y_n)^2] = \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{2\alpha} \mathbb{P}(A_k).$$

L'ultima espressione tende a zero (per $n \to \infty$) per ogni $\alpha < 1/2$, essendo in questo caso sommabile la serie $\sum_{k=n+1}^{n} k^{2\alpha} \mathbb{P}(A_k)$.