Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2013-14, I semestre
19 dicembre, 2013

CP410: Esonero 2, 19 dicembre 2013

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nome:____

1. Sia X_n il numero di teste su n lanci di una moneta equa. Calcolare i limiti
   (a) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[e^{-X_n}]$;
   (b) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[e^{-\frac{1}{n}X_n}]$;
   (c) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}X_n}]$.

Soluzione: Scriviamo $X_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ dove Y_i sono variabili di Bernoulli di parametro $1/2$ indipendenti. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha

$$\mathbb{E}[e^{-aX_n}] = \mathbb{E}\Big[\prod_{i=1}^n e^{-aY_i}\Big] = \mathbb{E}\Big[e^{-aY_1}\Big]^n = \Big(\frac{1}{2}\,e^{-a} + \frac{1}{2}\Big)^n.$$

Nel caso (a), abbiamo $a = 1$, quindi $\frac{1}{2}\,e^{-a} + \frac{1}{2} < 1$ indipendente da n, e allora

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[e^{-X_n}] = 0.$$

Nel caso (b) abbiamo $a = 1/n$ e quindi sviluppando $e^{-1/n} = 1 - 1/n + O(1/n^2)$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[e^{-\frac{1}{n}X_n}] = \lim_{n\to\infty} \Big(1 - \frac{1}{2n}\Big)^n = \sqrt{e^{-1}}.$$

Per il punto (c), abbiamo $a = 1/\sqrt{n}$, e sviluppando $e^{-1/\sqrt{n}} = 1 - 1/\sqrt{n} + O(1/n)$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}X_n}] = \lim_{n\to\infty} \Big(1 - \frac{1}{2\sqrt{n}}\Big)^n = 0.$$

Soluzione alternativa: per la legge dei grandi numeri forte sappiamo che $\frac{1}{n}X_n \to \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}$-q.c. In particolare, si deve avere $X_n \to \infty$, $\mathbb{P}$-q.c. e $\frac{1}{\sqrt{n}}X_n \to \infty$, $\mathbb{P}$-q.c.
Allora (a), (b) e (c) seguono immediatamente per convergenza dominata usando il fatto che $|e^{-X_n}|, |e^{-\frac{1}{n}X_n}|, |e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}X_n}| \leqslant 1$.

Nome:______________________________________

2. Siano X, Y variabili aleatorie indipendenti con X normale di media $\mu = 1$ e varianza $\sigma^2 = 1$, e Y esponenziale di parametro $\lambda > 0$.
   (a) Scrivere la funzione caratteristica della variabile $Z_\lambda = X + Y$.
   (b) Mostrare che Z_λ converge in distribuzione per $\lambda \to \infty$ e descriverne il limite.
   (c) Calcolare $\lim_{\lambda\to\infty} \mathbb{E}[\cos(Z_\lambda)]$.

Soluzione: (a). Per l'indipendenza abbiamo

$$\varphi_{Z_\lambda}(\theta) = \mathbb{E}[e^{i\theta Z_\lambda}] = \mathbb{E}[e^{i\theta X}]\mathbb{E}[e^{i\theta Y}] = e^{-\frac{1}{2}\theta^2\sigma^2 + i\theta\mu}\,\frac{\lambda}{\lambda - i\theta}\,, \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

(b). Prendendo il limite per $\lambda \to \infty$ si ha $\frac{\lambda}{\lambda - i\theta} = \frac{1}{1-i(\theta/\lambda)} \to 1$:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \varphi_{Z_\lambda}(\theta) = e^{-\frac{1}{2}\theta^2\sigma^2 + i\theta\mu}\,, \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

Pertanto, $Z_\lambda \to Z_\infty$ in distribuzione, dove Z_∞ ha la stessa distribuzione di X.

(c). La convergenza in distribuzione implica che per ogni funzione $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continua e limitata si ha

$$\mathbb{E}[h(Z_\lambda)] \to \mathbb{E}[h(Z_\infty)] = \mathbb{E}[h(X)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-(x-1)^2/2} dx,$$

per $\lambda \to \infty$. In particolare, se $h(t) = \cos(t) = \mathrm{Re}\, e^{it}$ abbiamo

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to\infty} \mathbb{E}[\cos(Z_\lambda)] &= \mathbb{E}[\cos(X)] = \mathrm{Re}\ \varphi_X(1) \\ &= \mathrm{Re}\ e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 + i\mu} = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2}\cos(\mu) \\ &= \sqrt{e^{-1}}\cos(1).\end{aligned}$$

Nome:____

3. Siano $X_1, X_2, \dots$ variabili aleatorie indipendenti tali che $X_i = \pm 1$ con probabilità $1/2$. Per $k \in \mathbb{N}$ fissato, sia $S_0 = k$ e $S_n = k + \sum_{i=1}^n X_i$, per $n \in \mathbb{N}$. Sia $\tau^{(k)}$ il tempo definito da

$$\tau^{(k)} = \inf\{n \geqslant 0 : \ S_n = 0 \text{ oppure } S_n = k^2\}.$$

Calcolare in funzione di k:

(a) Il valore atteso di $S_{\tau^{(k)}}$.

(b) Il valore atteso di $S^2_{\tau^{(k)}}$.

(c) Il valore atteso di $\tau^{(k)}$.

Soluzione: Ricordiamo che $M_n = \sum_{i=1}^n X_i = S_n - k$ è una martingala con $M_0 = 0$. Inoltre $M_n^2 - n$ è una martingala con $M_0 = 0$. Il tempo $\tau^{(k)}$ è il primo tempo in cui M_n vale $-k$ oppure $k^2 - k$, e si ha $S_{\tau^{(k)}} = M_{\tau^{(k)}} + k$. Quindi il tempo $\tau^{(k)}$ è finito quasi certamente. Essendo limitata la martingala $M_{n \wedge \tau^{(k)}}$, si puo' applicare il teorema di optional stopping per ottenere $0 = \mathbb{E}[M_{\tau^{(k)}}]$. Allora

$$\mathbb{E}[S_{\tau^{(k)}}] = k + \mathbb{E}[M_{\tau^{(k)}}] = k.$$

Inoltre

$$0 = \mathbb{E}[M_{\tau^{(k)}}] = -kp_k + (k^2 - k)(1 - p_k),$$

dove $p_k = \mathbb{P}[M_{\tau^{(k)}} = -k]$. Ne segue che $p_k = (k^2 - k)/k^2 = 1 - 1/k$, e $1 - p_k = 1/k$. Allora $S^2_{\tau^{(k)}}$ vale 0 con probabilità $1 - 1/k$ e vale k^4 con probabilità $1/k$. Quindi

$$\mathbb{E}[S^2_{\tau^{(k)}}] = k^3.$$

Sfruttando il fatto che gli incrementi della martingala $M^2_{n \wedge \tau^{(k)}} - n \wedge \tau^{(k)}$ sono limitati, e usando il fatto che $\tau^{(k)}$ è integrabile (questo si puo' dimostrare facilmente per esempio dominando $\tau^{(k)}$ in termini di un multiplo di una variabile geometrica) si puo' applicare il teorema di optional stopping alla martingala $M_n^2 - n$, per ottenere

$$\mathbb{E}[\tau^{(k)}] = \mathbb{E}[M^2_{\tau^{(k)}}].$$

Ne segue che

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\tau^{(k)}] = \mathbb{E}[M^2_{\tau^{(k)}}] &= k^2 p_k + (k^2 - k)^2 (1 - p_k) \\
&= k^2 - k + k^3 - 2k^2 + k \\
&= k^3 - k^2.
\end{aligned}$$

Nome:______________________________________

4. Siano $Y_1, Y_2, \ldots$ variabili aleatorie indipendenti di Poisson con parametro $\lambda = 2$. Sia $\mathcal{F}_n$ la σ-algebra generata dalle variabili $\{Y_i,\ i = 1, \ldots, n\}$. Sia M_n il processo definito da

$$M_n = 2^{-n} \prod_{k=1}^{n} Y_k\,, \qquad M_0 = 1.$$

   (a) Mostrare che, rispetto a $\{\mathcal{F}_n\}$, M_n è una martingala limitata in L^1.

   (b) Dire se M_n converge quasi certamente.

   (c) Dire se M_n converge in L^1.

Soluzione: (a). Notiamo che $M_n = \prod_{k=1}^{n}(Y_k/2)$, e dunque M_n è il prodotto di n v.a. indipendenti, nonnegative e con media 1. Quindi M_n è una martingala. Inoltre si ha $\mathbb{E}[M_n] = 1$ per ogni $n = 0, 1, \ldots$, quindi M_n è limitata in L^1. Allora per il Teorema di convergenza di Doob si ha che M_n converge quasi certamente a una variabile aleatoria M_∞.

Mostriamo che $M_\infty = 0$, $\mathbb{P}$-q.c. Infatti, sia $E_n = \{Y_n \neq 0\}$. Chiaramente, per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'evento $\{M_n \neq 0\}$ equivale a $A_n := \cap_{k=1}^{n} E_k$, l'evento che tutte le Y_i sono diverse da zero fino al tempo n. Per l'indipendenza si ha

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(Y_1 \neq 0)^n = (1 - e^{-2})^n \to 0, \quad n \to \infty$$

Per ogni n:

$$\mathbb{P}(M_\infty \neq 0) = \mathbb{P}(M_\infty \neq 0, A_n) \leqslant \mathbb{P}(A_n).$$

Passando al limite si ha $\mathbb{P}(M_\infty \neq 0) = 0$. Quindi $M_\infty = 0$ $\mathbb{P}$-q.c.

Infine, M_n non converge in L^1 poiché ciò implicherebbe $1 = \mathbb{E}[M_n] \to \mathbb{E}[M_\infty] = 0$.

Nome:____

5. Enunciare e fornire cenni di dimostrazione del Teorema del Limite Centrale