Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2014-15, I semestre
19 gennaio, 2015

# CP410: Esame 1, 19 gennaio 2015

| | |
|---|---|
| Cognome | |
| Nome | |
| Matricola | |
| Firma | |

Nome:________________________________________

1. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ lo spazio di probabilitá definito da $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F}$ la sigma algebra dei Boreliani e $\mathbb{P}$ la misura di Lebesgue su $[0,1]$. Siano $Y, Z$ le variabili aleatorie definite da

$$Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } \omega \in (1/3, 1] \\ 1 & \text{se } \omega \in [0, 1/3] \end{cases} \qquad Z(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } \omega \in (1/2, 1] \\ 1 & \text{se } \omega \in [0, 1/2] \end{cases}$$

(a) Dire se $Y, Z$ sono indipendenti.

(b) Descrivere la sigma algebra $\mathcal{G} = \sigma(Y, Z)$ generata da $Y$ e $Z$.

(c) Fare un esempio di variabile aleatoria $X$ tale che $X$ non è $\mathcal{G}$-misurabile.

(d) Descrivere la variabile aleatoria $\mathbb{E}[Y|Z]$

**Soluzione**: (a). Le variabili non sono indipendenti, infatti l'evento $\{Y = 1\}$ implica l'evento $\{Z = 1\}$.

(b). La $\sigma$-algebra $\mathcal{G}$ consiste degli insiemi $\{[0,1/3], [0,1/2], (1/3,1], (1/2,1]\}$ e di tutte le loro possibili unioni e intersezioni. Si ottiene

$$\mathcal{G} = \{\emptyset, [0,1/3], [0,1/2], (1/3,1], (1/2,1], (1/3,1/2], [0,1/3] \cup (1/2,1], [0,1]\}$$

(c). La variabile $X(\omega) = 1_{\omega \in [0,1/4]}$ non è $\mathcal{G}$ misurabile, infatti $[0,1/4]$ non è in $\mathcal{G}$.

(d). La attesa condizionata $E[Y|Z]$ è la variabile aleatoria $W$ tale che, se $Z = 1$, ossia se $\omega \in [0,1/2]$, allora

$$W(\omega) = \mathbb{P}(Y = 1 | Z = 1) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3},$$

mentre se $Z = 0$, ossia $\omega \in (1/2, 1]$ allora

$$W(\omega) = \mathbb{P}(Y = 1 | Z = 0) = 0.$$

In forma piú compatta possiamo scrivere $W = \mathbb{E}[Y|Z] = \frac{2}{3} Z$.

Nome:________________________________________

2. Sia $\{X_n\}$ una successione di variabili aleatorie iid con $X_k = \pm 1$ con probabilità 1/2. Sia $M_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, con $M_0 = 0$.

   (a) Dimostrare che per ogni $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ fissato, $\frac{1}{\sqrt{n}}\,(M_n + n^\alpha)$ converge in distribuzione alla normale standard $N(0, 1)$.

   (b) Dimostrare che per ogni $k \in \mathbb{N}$ fissato $\frac{1}{\sqrt{n}}\,M_{n+k}$ converge in distribuzione alla normale standard $N(0, 1)$.

**Soluzione**: (a). Si ha $\sigma^2 = \mathbb{E}[X_k^2] = 1$ e dunque per il teorema del limite centrale sappiamo che la funzione caratteristica di $M_n/\sqrt{n}$ soddisfa

$$\varphi_{\frac{M_n}{\sqrt{n}}}(\theta) \to \exp\left(-\tfrac{1}{2}\,\theta^2\right), \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

Dunque per ogni $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$, usando $n^\alpha/\sqrt{n} \to 0$ si ha

$$\varphi_{\frac{M_n+n^\alpha}{\sqrt{n}}}(\theta) = \varphi_{\frac{M_n}{\sqrt{n}}}(\theta)\, e^{i\frac{\theta n^\alpha}{\sqrt{n}}} \to \exp\left(-\tfrac{1}{2}\,\theta^2\right), \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

Allora possiamo dedurre che per ogni $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$, $\frac{1}{\sqrt{n}}\,(M_n + n^\alpha)$ converge in distribuzione alla normale standard $N(0, 1)$.

(c). Scriviamo $\tilde{M}_n = \sum_{j=k+1}^{k+n} X_k$ e notiamo che $M_{n+k} = M_k + \tilde{M}_n$, che $M_k$ e $\tilde{M}_n$ sono indipendenti e che $\tilde{M}_n$ ha la stessa distribuzione di $M_n$. Allora $\varphi_{\frac{\tilde{M}_n}{\sqrt{n}}}(\theta) = \varphi_{\frac{M_n}{\sqrt{n}}}(\theta)$, e usando l'indipendenza si ha

$$\varphi_{\frac{M_{n+k}}{\sqrt{n}}}(\theta) = \varphi_{\frac{M_n}{\sqrt{n}}}(\theta)\,\varphi_{\frac{M_k}{\sqrt{n}}}(\theta).$$

Poiché sappiamo che $\varphi_{\frac{M_n}{\sqrt{n}}}(\theta) \to \exp\left(-\frac{1}{2}\,\theta^2\right)$, è sufficiente mostrare che per ogni $k \in \mathbb{Z}$, si ha

$$\varphi_{\frac{M_k}{\sqrt{n}}}(\theta) \to 1\,, \qquad \theta \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Essendo $k$ fissato si ha che (1) segue dal teorema di convergenza dominata.

Nome:________________________________________

3. Supponiamo che $\{Y_n\}$ sia una successione di variabili aleatorie su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tale che $Y_n$ converge a 0 quasi certamente. Dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$:

   (a) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon) = 0$

   (b) Se le $Y_i$ sono indipendenti, allora si ha anche $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon) < \infty$.

**Soluzione**: La parte a) esprime il noto fatto che convergenza quasi certa implica convergenza in probabilità. La parte b) segue dal secondo lemma di Borel-Cantelli.

Nome:____________________________________

4. Sia $X$ la variabile aleatoria con funzione di distribuzione

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leqslant 2 \\ 1 - e^{-(x-2)} & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Sia $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, dove $X_k$ sono copie indipendenti della variabile $X$.

(a) Trovare un valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $S_n - \alpha n$ è una martingala

(b) Trovare un valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $S_n^2 - 6nS_n + 9n^2 - \alpha n$ è una martingala

(c) Trovare un valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\exp(\frac{1}{2}S_n - \alpha n)$ è una martingala

**Soluzione**: Osserviamo innanzitutto che $X$ si può scrivere come $X = 2+Y$ dove $Y$ è esponenziale di parametro 1. Infatti

$$\mathbb{P}(2 + Y \leqslant x) = \mathbb{P}(Y \leqslant x - 2) = (1 - e^{-(x-2)})\, 1_{x>2} = F(x).$$

Dunque la media di $X$ vale $2+\mathbb{E}[Y] = 3$, e la varianza di $X$ vale 1. Sia $\mathcal{F}_n$ la filtrazione naturale.

(a). Sia $M_n = S_n - \alpha n$. Se richiediamo che $\mathbb{E}[M_{n+1} - M_n|\mathcal{F}_n] = 0$, si ha $\mathbb{E}[X_{n+1} - \alpha] = 0$ e dunque $\alpha = \mathbb{E}[X] = 3$. Allora $S_n - 3n$ è una martingala rispetto a $\{\mathcal{F}_n\}$.

(b). Se $Q_n = S_n^2 - 6nS_n + 9n^2 - \alpha n$, allora $Q_n = (S_n - 3n)^2 - \alpha n = M_n^2 - \alpha n$, con $M_n = (S_n - 3n)$. Inoltre usando $M_{n+1} = M_n + (X_{n+1} - 3)$ si ottiene

$$Q_{n+1} - Q_n = M_{n+1}^2 - M_n^2 - \alpha = (X_{n+1} - 3)^2 + 2(X_{n+1} - 3)M_n - \alpha.$$

Per l'indipendenza si ha $\mathbb{E}[(X_{n+1} - 3)M_n|\mathcal{F}_n] = M_n\mathbb{E}[X_{n+1} - 3] = 0$. Allora la condizione di martingala $\mathbb{E}[Q_{n+1} - Q_n|\mathcal{F}_n] = 0$ equivale a

$$\mathbb{E}[(X_{n+1} - 3)^2 - \alpha] = 0,$$

ovvero $\alpha = \mathrm{Var}(X) = 1$.

(c). Sia $W_n = \exp(\frac{1}{2}S_n - \alpha n)$. Allora $W_n = \prod_{k=1}^n Z_k$ dove $Z_k = e^{\frac{1}{2}X_k - \alpha}$ sono variabili non-negative iid, con media

$$\mathbb{E}[Z_k] = e^{-\alpha}\mathbb{E}[e^{\frac{1}{2}X_k}] = e^{-\alpha}\mathbb{E}[e^{1+\frac{1}{2}Y}] = e^{-\alpha}\int_0^\infty e^{-s}e^{1+s/2}ds = 2e^{1-\alpha}.$$

Quindi se $\alpha = 1 + \log 2$ si ha $\mathbb{E}[Z] = 1$ e si vede che $W_n$ è una martingala rispetto a $\{\mathcal{F}_n\}$.

Nome:______________________________________

5. Siano $\{X_k\}$ variabili aleatorie iid tali che $X_k$ è uniforme in $\{-2,-1,0,1,2\}$. Sia $S_0 = 0$ e $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Sia inoltre $\tau = \inf\{n \geqslant 1 : \; S_n = 1\}$. Dimostrare che $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$ e $\mathbb{E}[\tau] = \infty$.

**Soluzione**: Per mostrare che $\tau < \infty$ quasi certamente possiamo procedere come segue. Per la legge $0-1$ di Kolmogorov sappiamo che $\limsup S_n = \infty$ q.c. e (per simmetria) $\liminf S_n = -\infty$ q.c. Notiamo che al contrario del caso di passeggiata semplice e simmetrica, caso in cui le $X_k$ sono uniformi in $\{-1,1\}$, questo fatto non è immediatamente garanzia del fatto che $\tau < \infty$ q.c. Tuttavia, poiché i salti sono al piú di lunghezza 2 si ha che $|S_n| \leqslant 1$ infinite volte q.c. Inoltre,

$$\min_{k \in \{-1,0,1\}} \mathbb{P}(S_{n+1} = 1 | S_n = k) \geqslant \frac{1}{5}.$$

Pertanto, si avrà necessariamente $S_n = 1$ infinite volte. In particolare, $\tau < \infty$ q.c.
A questo punto possiamo applicare il teorema di optional stopping, essendo $S_n$ un a martingala con incrementi limitati, se fosse $\mathbb{E}[\tau] < \infty$ si avrebbe $1 = \mathbb{E}[S_\tau] = 0$, una contraddizione.

Nome:______________________________________

6. Enunciare e dimostrare il Teorema di Optional Stopping per martingale.

Nome:________________________________________