Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2015-16, I semestre
20 gennaio 2016

CP410: Esame 1, 20 gennaio 2016

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nome:______________________________________

1. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ lo spazio di probabilità definito da $\Omega = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{F}$ la sigma algebra dei Boreliani e $\mathbb{P}$ la misura definita da

$$\mathbb{P}(dx, dy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x-\frac{1}{2}(y-x)^2} 1_{x\in[0,\infty)} dxdy\,.$$

Siano X, Y le variabili aleatorie $X(\omega) = x$ e $Y(\omega) = y$ per $\omega = (x, y)$.

(a) Scrivere la densità di probabilità X

(b) Dire se X, Y sono indipendenti.

(c) Descrivere la variabile aleatoria $\mathbb{E}[\,Y \mid X]$.

Soluzione: (a). La densità congiunta di (X, Y), rispetto alla misura di Lebesgue $dxdy$, è

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x-\frac{1}{2}(y-x)^2} 1_{x\in[0,\infty)}.$$

Allora la densità di X è la

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy = e^{-x} 1_{x\in[0,\infty)}.$$

(b). Non sono indipendenti poiché la $f(x, y)$ non è esprimibile come un prodotto.
(c). Condizionato al valore di X si vede che Y è normale con media X e varianza 1. Allora $\mathbb{E}[\,Y \mid X] = X$ q.c.

Nome:____

2. Un giocatore ha 10 euro. A ogni mano, indipendentemente, il giocatore ha probabilità 1/3 di vincere un euro e probabilità 2/3 di perdere un euro. Il gioco termina quando il giocatore esaurisce il denaro. Calcolare il numero medio di mani necessarie per terminare il gioco.

Soluzione: Ricordiamo che se $p = 1/3, q = 2/3$ e Z_i sono i.i.d. tali che $Z_i = 1$ con prob. p e $Z_i = -1$ con prob. p, allora $S_n - n(p-q)$, con $S_n = \sum_{i=1}^n Z_i$, $S_0 = 10$, è una martingala. Inoltre

$$\tau = \inf\{n \geqslant 0 : \, S_n = 0\},$$

è la durata del gioco. Poiché $q > p$ sappiamo che $\mathbb{E}[\tau] < \infty$ (vedi appunti lezione). Allora per l'optional stopping si ha $\mathbb{E}[S_\tau - \tau(p-q)] = 10$. Usando $S_\tau = 0$,

$$\mathbb{E}[\tau] = \frac{10}{q-p} = 30.$$

Nome:____

3. Consideriamo la passeggiata aleatoria S_n tale che $S_0 = 0$ e $S_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$ dove Z_i sono variabili i.i.d. uniformemente distribuite in $\{-2, -1, 0, 0, 1, 2\}$. Sia

$$\tau = \inf\{n \geqslant 0 : \ |S_n| \geqslant 10\}.$$

Dimostrare che

(a) τ è un tempo di arresto rispetto alla filtrazione $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \ldots, Z_n)$;

(b) $\mathbb{E}[\tau] < \infty$;

(c) $\mathbb{E}[\tau] \geqslant 50$.

Soluzione: Per il punto c) notiamo che $M_n := S_n^2 - 2n$ è una martingala. Inoltre $M_{n\wedge\tau}$ è dominata dalla variabile integrabile $100+2\tau$, e dunque per optional stopping si ha $\mathbb{E}[\tau] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[S_\tau^2]$. Usando $S_\tau^2 \geqslant 100$, si ha $\mathbb{E}[\tau] \geqslant 50$.

Nome:____

4. Sia X_λ una variabile di Poissone di parametro λ. Dimostrare che $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}(X_\lambda - \lambda)$ converge in distribuzione per $\lambda \to \infty$, e descriverne il limite.

Soluzione: Calcoliamo la funzione caratteristica di $Y_\lambda := \frac{1}{\sqrt{\lambda}}(X_\lambda - \lambda)$:

$$\varphi_{Y_\lambda}(\theta) = \mathbb{E}[e^{i\theta Y_\lambda}] = e^{-i\theta\sqrt{\lambda}}\mathbb{E}[e^{i\theta X_\lambda/\sqrt{\lambda}}].$$

Si ha

$$\mathbb{E}[e^{i\theta X_\lambda/\sqrt{\lambda}}] = e^{\lambda(e^{i\theta/\sqrt{\lambda}}-1)}.$$

Sviluppando, per $\lambda \to \infty$ si ha

$$-i\theta\sqrt{\lambda} + \lambda(e^{i\theta/\sqrt{\lambda}} - 1) \to -\frac{1}{2}\theta^2.$$

In conclusione,

$$\varphi_{Y_\lambda}(\theta) \to e^{-\frac{1}{2}\theta^2}, \qquad \lambda \to \infty.$$

Dunque Y_λ converge in distribuzione alla normale standard.

Nome:_______________________________________

5. Siano $\{Y_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ variabili aleatorie iid tali che $\mathbb{E}[|Y_k|] < \infty$, con

$$\mathbb{E}[Y_k] < 0\,, \qquad \mathbb{E}[2^{Y_k}] = 1.$$

   Sia $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$.

   (a) Dire se 2^{S_n} converge quasi certamente

   (b) Dire se 2^{S_n} converge in L^1

   (c) Costruire un esempio di variabili Y_k con le proprietà suddette.

Soluzione: (a). Notiamo che

$$M_n = 2^{S_n} = \prod_{k=1}^n 2^{Y_k}, \qquad M_0 = 1,$$

è martingala limitata in L^1 e quindi converge quasi certamente. Inoltre, essendo $\alpha := \mathbb{E}[Y_k] < 0$ si ha (per la legge dei grandi numeri forte): $\frac{1}{n} S_n \to \alpha$ quasi certamente. In particolare, $S_n \to -\infty$ q.c. e quindi $M_n \to 0$ q.c.

(b). M_n non converge in L^1 essendo $M_n \to 0$ q.c. e $\mathbb{E}[M_n] = 1$ per ogni n.

(c). Un esempio di Y_k si ottiene ponendo $Y_k = 1$ con prob. p e $Y_k = -1$ con prob. $1-p$, con $\mathbb{E}[2^{Y_k}] = 2p + (1-p)\frac{1}{2} = 1$, ossia

$$p = \frac{1 - 2^{-1}}{2 - 2^{-1}} = \frac{1}{3}.$$

Essendo $p < 1/2$, si ha anche $\mathbb{E}[Y_k] < 0$ come richiesto.

Nome:____

6. Enunciare e dimostrare il teorem del limite centrale.

Nome:____