Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2016-17, I semestre
26 gennaio 2017

CP410: Esame 1, 26 gennaio 2017

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nome:____

1. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ lo spazio di probabilità $\Omega = (0, 1]$, $\mathcal{F}$ la sigma algebra dei Boreliani e $\mathbb{P}$ la misura di Lebesgue su Ω. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia T_n la variabile aleatoria definita da $T_n(\omega) = -\frac{1}{n}\log\omega$, $\omega \in \Omega$.

   (a) Scrivere la densità di probabilità di T_n

   (b) Dire se T_n converge quasi certamente.

   (c) Calcolare la covarianza tra T_1 e T_n.

Soluzione: (a). Per $t \in (0, \infty)$ si ha

$$\mathbb{P}(T_n \leqslant t) = \mathbb{P}(T_1 \leqslant nt) = \mathbb{P}(\omega \geqslant e^{-nt}) = 1 - e^{-nt}.$$

Inoltre $\mathbb{P}(T_n \leqslant t) = 0$ se $t \leqslant 0$. Dunque T_n è una variabile esponenziale di parametro n, per ogni $n \in \mathbb{N}$, e la densità di T_n vale

$$f_{T_n}(t) = ne^{-nt}\, 1_{t\in[0,\infty)}.$$

(b). Fissato $\omega \in (0, 1]$ si ha $T_n(\omega) \to 0$, dunque $T_n \to 0$ q.c.

(c). Si ha $\mathrm{Cov}(T_1, T_n) = \mathbb{E}[T_1T_n] - \mathbb{E}[T_1]\mathbb{E}[T_n]$. Inoltre $T_1T_n = \frac{1}{n}T_1^2$, $\mathbb{E}[T_1^2] = 2$ e $\mathbb{E}[T_n] = \frac{1}{n}$. Dunque

$$\mathrm{Cov}(T_1, T_n) = \frac{1}{n}\mathbb{E}[T_1^2] - \frac{1}{n} = \frac{1}{n}.$$

Nome:____

2. Consideriamo due successioni di variabili aleatorie X_n e Y_n definite ricorsivamente come segue. Poniamo $X_0 = Y_0 = 0$. Al tempo n si lanciano due dadi: se le due facce sono uguali poniamo $X_n = X_{n-1} + 1$ e $Y_n = Y_{n-1} + k$ dove k è il valore comune alle due facce; se le due facce non sono uguali poniamo $X_n = X_{n-1}$ e $Y_n = Y_{n-1}$. Sia τ il primo tempo $n \in \mathbb{N}$ tale che $X_n = 5$.

   (a) Calcolare il valore atteso di τ.

   (b) Calcolare il valore atteso di Y_τ.

   (c) Dire se τ e Y_τ sono indipendenti.

Soluzione: a). Osserviamo che gli incrementi $\Delta_i = X_i - X_{i-1}$ sono Bernoulli indipendenti di parametro $p = 1/6$, essendo p la probabilità di avere due facce uguali nel lancio di due dadi. Allora $X_n - np$ è una martingala. Per il teorema di optional stopping (la variabile $X_{n\wedge\tau}$ è limitata) si ha $\mathbb{E}[\tau] = \frac{1}{p}\mathbb{E}[X_\tau] = \frac{5}{p} = 30$. Alternativamente si può osservare che τ è la somma di 5 variabili geometriche (indipendenti) di parametro p.

b). Gli incrementi $\Gamma_i = Y_i - Y_{i-1}$ della successione Y_n sono indipendenti e identicamente distribuiti con

$$\mathbb{P}(\Gamma_1 = 0) = 1 - p\,, \quad \mathbb{P}(\Gamma_1 = k) = \frac{1}{36}, \;\; k = 1, \dots, 6.$$

Inoltre

$$\mathbb{P}(\Gamma_1 = k | \Delta_1 = 1) = \frac{1}{6}, \;\; k = 1, \dots, 6.$$

Possiamo anche scrivere $Y_j = \sum_{i=1}^{j} \Gamma_i \, \mathbf{1}(\Delta_i = 1)$.
L'evento $\{\tau = j\}$ equivale all'evento: esistono indici $1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leqslant j-1$ tali che $\Delta_{i_1} = \cdots = \Delta_{i_4} = \Delta_j = 1$ e $\Delta_\ell = 0$ per tutti gli indici $\ell \in \{1, \dots, j-1\} \setminus \{i_1, \dots, i_4\}$. In particolare,

$$\mathbb{P}(\tau = j) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leqslant j-1} (\tfrac{1}{6})^5 (\tfrac{5}{6})^{j-5} = \binom{j-1}{4} (\tfrac{1}{6})^5 (\tfrac{5}{6})^{j-5}. \tag{1}$$

Inoltre, per ogni $j = 5, 6, \dots,$ e $m \geqslant 5$, si ha

$$\mathbb{P}(Y_\tau = m, \tau = j) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leqslant j-1} (\tfrac{1}{6})^5 (\tfrac{5}{6})^{j-5} \mathbb{P}(\Gamma_{i_1} + \cdots + \Gamma_{i_4} + \Gamma_j = m | \Delta_{i_1} = \cdots = \Delta_{i_4} = \Delta_j = 1).$$

Osservando che $\mathbb{P}(\Gamma_{i_1} + \cdots + \Gamma_{i_4} + \Gamma_j = m | \Delta_{i_1} = \cdots = \Delta_{i_4} = \Delta_j = 1)$ non dipende da j e non dipende dalla scelta degli indici $1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leqslant j-1$ si ha

$$\mathbb{P}(Y_\tau = m, \tau = j) = \binom{j-1}{4} (\tfrac{1}{6})^5 (\tfrac{5}{6})^{j-5} \mathbb{P}(\Gamma_1 + \cdots + \Gamma_5 = m | \Delta_i = 1, i = 1, \dots, 5). \tag{2}$$

Sommando su $j \geqslant 5$ si ha, per ogni $m \geqslant 5$:

$$\mathbb{P}(Y_\tau = m) = \mathbb{P}(\Gamma_1 + \cdots + \Gamma_5 = m | \Delta_i = 1, i = 1, \dots, 5). \tag{3}$$

Inoltre usando $\mathbb{E}(\Gamma_1 | \Delta_1 = 1) = \sum_{k=1}^{6} \frac{k}{6} = \frac{7}{2}$ troviamo

$$\mathbb{E}(Y_\tau) = 5\mathbb{E}(\Gamma_1 | \Delta_1 \geqslant 1) = 5\,\frac{7}{2} = 17.5$$

c). Le variabili τ e Y_τ sono indipendenti, come si vede da (1)-(2)-(3).

Nome:____

3. Sia $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ dove X_i sono variabili i.i.d. con media nulla e varianza $\sigma^2 \in (0, \infty)$.

   (a) Dire se $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$ converge q.c.

   (b) Dire se $\frac{1}{n}S_n$ converge in L^1.

   (c) Usare il teorema del limite centrale e la legge $0-1$ di Kolmogorov per dimostrare che

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = +\infty\,, \qquad \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = -\infty\,, \qquad q.c.$$

Soluzione:
a). Notiamo che X_i^2 sono i.i.d. con $\mathbb{E}[|X_i^2|] = \mathbb{E}[X_i^2] = \sigma^2$. Allora per la legge forte dei grandi numeri si ha q.c.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 \to \sigma^2.$$

b). Per la legge forte dei grandi numeri sappiamo che $\frac{1}{n}S_n \to 0$ q.c. Quindi se $\frac{1}{n}S_n$ converge in L^1 deve convergere a zero. Dobbiamo verificare se $\mathbb{E}[|\frac{S_n}{n}|] \to 0$. Abbiamo

$$\mathbb{E}\left[\frac{S_n^2}{n^2}\right] = \frac{1}{n^2}\mathbb{E}[S_n^2] = \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n \mathbb{E}[X_i X_j] = \frac{\sigma^2}{n} \to 0.$$

Dunque $\frac{1}{n}S_n$ converge a zero in L^2, e a maggior ragione in L^1.

c). Per la legge 0-1 abbiamo che per ogni $K \in \mathbb{R}$ l'evento

$$A_K = \left\{\limsup_{n\to\infty} \tfrac{1}{\sqrt{n}} S_n \geqslant K\right\}\,,$$

ha probabilità 0 oppure 1. Il teorema del limite centrale mostra che per ogni $K > 0$ si ha $\mathbb{P}(A_K) > 0$. Infatti

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_K) &= \mathbb{P}\left(\cap_n \cup_{m\,\geqslant\, n} \{\tfrac{S_m}{\sqrt{m}} \geqslant K\}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\cup_{m\,\geqslant\, n}\{\tfrac{S_m}{\sqrt{m}} \geqslant K\}\right) \geqslant \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\tfrac{S_n}{\sqrt{n}} \geqslant K\right) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_K^\infty e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\,dz > 0.\end{aligned}$$

Quindi $\mathbb{P}(A_K) = 1$ per ogni $K > 0$. Allora $\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = +\infty$ q.c.
Applicando lo stesso argomento a $-S_n$ si ha l'affermazione per il $\liminf$.

Nome:______________________________________

4. Siano X_k variabili aleatorie indipendenti con funzione caratteristica

$$\varphi_k(\theta) = e^{\lambda_k(e^{i\theta}-1)}, \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

dove λ_k è una successione di numeri positivi tali che $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = 1$. Si consideri la variabile aleatoria

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

(a) Dimostrare che Y_n converge in distribuzione a una variabile aleatoria Y_∞.

(b) Calcolare $\mathbb{P}(Y_\infty = 0)$.

Soluzione: Osserviamo che Y_k è la funzione caratteristica di una variabile di Poisson di parametro λ_k. Inoltre la funzione caratteristica di Y_n vale

$$\varphi_{Y_n}(\theta) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_k(\theta) = e^{(e^{i\theta}-1)\sum_{k=1}^{n} \lambda_k} \to e^{(e^{i\theta}-1)}, \quad n \to \infty.$$

Dunque $Y_n \to Y_\infty$ in distribuzione, dove Y_∞ è la variabile di Poisson di parametro 1. In particolare,

$$\mathbb{P}(Y_\infty = 0) = e^{-1}.$$

Nome:____

5. Sia S_n la passeggiata aleatoria semplice e simmetrica con $S_0 = 0$. Per $k \in \mathbb{N}$ sia τ_k il primo tempo $n \in \mathbb{N}$ tale che $S_n < 0$ oppure $S_n > k - 1$.

   (a) Calcolare $\mathbb{E}[\tau_k]$

   (b) Calcolare $\mathbb{E}[|S_{\tau_k}|]$

   (c) Dire se S_{τ_k} converge in probabilità per $k \to \infty$.

Soluzione: (a). Notiamo che τ_k è il tempo di prima uscita dall'intervallo $[0, k-1]$. Usando la martingala S_n e il teorema di optional stopping si ha

$$\mathbb{E}[S_{\tau_k}] = 0.$$

Sappiamo che $S_{\tau_k} = -1$ oppure $S_{\tau_k} = k$. Dunque se p è la probabilità di $S_{\tau_k} = -1$, abbiamo $-p + k(1-p) = 0$ e dunque $p = \frac{k}{1+k}$. Inoltre usando la martingala $M_n = S_n^2 - n$ e il teorema di optional stopping si ha

$$0 = \mathbb{E}[M_{\tau_k}] = \mathbb{E}[S_{\tau_k}^2] - \mathbb{E}[\tau_k] = p + (1-p)k^2 - \mathbb{E}[\tau_k] = k - \mathbb{E}[\tau_k].$$

Allora $\mathbb{E}[\tau_k] = k$.

(b). Abbiamo $\mathbb{E}[|S_{\tau_k}|] = p + (1-p)k = \frac{2k}{1+k}$.

(c). Si ha $S_{\tau_k} \to -1$ in probabilità. Infatti, se $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|S_{\tau_k} + 1| > \varepsilon) = \mathbb{P}(S_{\tau_k} \neq -1) = \mathbb{P}(S_{\tau_k} = k) = \frac{1}{1+k} \to 0.$$

Nome:____

6. Sia X_n una successione di variabili aleatorie tale che X_n converge a zero q.c. Dimostrare che X_n converge a zero anche in probabilità.

Nome:____