Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2017-18, I semestre
23 gennaio, 2018

CP410: Esame 1, 23 gennaio 2018

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nome:____

1. Consideriamo infiniti lanci di una moneta equa. Sia E_n l'evento $\{\text{testa al lancio } n\}$ e per $\ell, k \in \mathbb{N}$ definiamo l'evento:

$$W(\ell, k) = E_{\ell+1} \cap \cdots \cap E_{\ell+k}.$$

   (a) Calcolare la probabilità di $W(\ell, k)$ al variare di $\ell, k \in \mathbb{N}$.

   (b) Dimostrare che
$$\mathbb{P}\left(\cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{\ell \geqslant n} W(\ell, \ell)\right) = 0.$$

   (c) Dimostrare che
$$\mathbb{P}\left(\cap_{k\in\mathbb{N}} \cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{\ell \geqslant n} W(\ell, k)\right) = 1.$$

Soluzione:

(a). Per l'indipendenza si ha

$$\mathbb{P}(W(\ell, k)) = \prod_{i=\ell+1}^{\ell+k} \mathbb{P}(E_i) = 2^{-k}.$$

(b). L'affermazione e' equivalente a

$$\mathbb{P}(\{W(\ell, \ell), \text{ i.o.}\}) = 0.$$

Notiamo che $\sum_\ell \mathbb{P}\left(W(\ell, \ell)\right) = \sum_\ell 2^{-\ell} < \infty$, e dunque il punto b) segue dal primo lemma di Borel-Cantelli.

(c). E' sufficiente mostrare che per ogni $k \in \mathbb{N}$ fissato, si ha $\mathbb{P}(\Omega_k) = 1$, dove

$$\Omega_k = \cap_n \cup_{\ell \geqslant n} W(\ell, k).$$

Ossia vogliamo mostrare che per k fissato si ha

$$\mathbb{P}(\{W(\ell, k), \text{ i.o.}\}) = 1.$$

Gli eventi $W(\ell, k)$, $\ell = 1, 2, \ldots$ non sono indipendenti quindi non si può usare immediatamente il secondo lemma di Borel Cantelli. Tuttavia osserviamo che gli eventi $W(ik, k)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ sono indipendenti per ogni k fissato. Inoltre si ha:

$$\Omega_k \supset \Omega'_k = \cap_n \cup_{i \geqslant n} W(ik, k).$$

Dunque basta mostrare che $\mathbb{P}(\Omega'_k) = 1$, ossia che quasi certamente si hanno infiniti $W(ik, k)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$. Questo segue dal secondo lemma di Borel Cantelli essendo $\mathbb{P}(W(ik, k)) = \mathbb{P}(W(0, k)) = 2^{-k} > 0$.

Nome:____

2. Siano $X_1, X_2, \dots$ variabili aleatorie i.i.d. tali che $X_i = -1, 0, +1$ con probabilità $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ rispettivamente. Per un $j \in \mathbb{Z}$ fissato, poniamo

$$S_0 = j, \qquad S_n = j + \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Dato $k \in \mathbb{N}$, sia τ il primo tempo n tale che $|S_n| = k$. Per $k \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}$ tali che $k > |j|$:

(a) Calcolare la probabilità di $S_\tau = k$ e $S_\tau = -k$.

(b) Calcolare il valore atteso di τ.

(c) Dimostrare che τ e S_τ non sono indipendenti se $j \neq 0$.

Soluzione: a). S_n è una martingala e si verificano facilmente le ipotesi del teorema di optional stopping. Dunque $\mathbb{E}[S_\tau] = S_0 = j$. Allora, se $k > |j|$:

$$j = k\mathbb{P}(S_\tau = k) - k\mathbb{P}(S_\tau = -k) = k\mathbb{P}(S_\tau = k) - k(1 - \mathbb{P}(S_\tau = k)).$$

Ne segue che

$$\mathbb{P}(S_\tau = k) = \frac{k+j}{2k}, \qquad \mathbb{P}(S_\tau = -k) = \frac{k-j}{2k}.$$

b). Poiché $(S_n - j)^2 - n\mathrm{Var}(X_1)$ è una martingala per j fissato, il teorema di optional stopping e gli argomenti usuali mostrano che

$$\mathbb{E}[\tau]\mathrm{Var}(X_1) = \mathbb{E}[(S_\tau - j)^2] = (k-j)^2\mathbb{P}(S_\tau = k) + (-k-j)^2\mathbb{P}(S_\tau = -k).$$

Inoltre $\mathrm{Var}(X_1) = \frac{1}{2}$, dunque

$$\mathbb{E}[\tau] = 2(k-j)^2\frac{k+j}{2k} + 2(k+j)^2\frac{k-j}{2k} = 2(k^2 - j^2).$$

c). Senza perdita di generalità possiamo supporre $k > j > 0$. Notiamo che l'evento $\tau = k - j$ implica necessariamente $X_1, \dots, X_{k-j} = 1$ (ossia i primi $k-j$ passi sono tutti a destra e dunque $S_\tau = k$). Allora,

$$\mathbb{P}(S_\tau = k | \tau = k - j) = 1 \neq \mathbb{P}(S_\tau = k) = \frac{k+j}{2k}.$$

Si può invece dimostrare che se $\tau = j$ allora S_τ e τ sono indipendenti.

Nome:____________________________________

3. Siano $Y_1, Y_2, \ldots$ variabili aleatorie i.i.d. con $Y_i \geqslant 0$. Ricordando che $\mathbb{E}[Y_i] = \int_0^\infty \mathbb{P}(Y_i > t)dt$, dimostrare che quasi certamente

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{Y_n}{n} = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathbb{E}[Y_1] < \infty \\ +\infty & \text{se } \mathbb{E}[Y_1] = \infty \end{cases}$$

Soluzione:

Supponiamo $\mathbb{E}[Y_1] = +\infty$. Mostriamo che

$$\sum_n \mathbb{P}(Y_n > sn) = \sum_n \mathbb{P}(Y_1 > sn) = +\infty \tag{1}$$

per ogni $s > 0$. Infatti, se vale (1) allora per il secondo lemma di Borel Cantelli si ha

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{Y_n}{n} \geqslant s\,, \qquad \text{q.c.}$$

Essendo $s > 0$ arbitrariamente grande si ha $\limsup_{n\to\infty} \frac{Y_n}{n} = +\infty$ q.c. come desiderato.
Per dimostrare (1), notiamo che per ogni $s > 0$:

$$\mathbb{E}[Y_1] = \int_0^\infty \mathbb{P}(Y_1 > t)dt = s\int_0^\infty \mathbb{P}(Y_1 > st)dt \leqslant s\sum_{n=0}^\infty \mathbb{P}(Y_1 > sn)$$

dove usiamo il fatto che se $t \in [n, n+1]$, si ha $\mathbb{P}(Y_1 > st) \leqslant \mathbb{P}(Y_1 > sn)$. Allora $\mathbb{E}[Y_1] = +\infty$ implica (1) per ogni $s > 0$.

Supponiamo ora $\mathbb{E}[Y_1] < \infty$. Mostriamo che

$$\sum_n \mathbb{P}(Y_n > sn) = \sum_n \mathbb{P}(Y_1 > sn) < \infty \tag{2}$$

per ogni $s > 0$. Se vale (2) allora per il primo lemma di Borel Cantelli si ha

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{Y_n}{n} \leqslant s\,, \qquad \text{q.c.}$$

Essendo $s > 0$ arbitrariamente piccolo si ha $\limsup_{n\to\infty} \frac{Y_n}{n} = 0$ q.c. come desiderato.
Per dimostrare la (2), per ogni $s > 0$:

$$\mathbb{E}[Y_1] = \int_0^\infty \mathbb{P}(Y_1 > t)dt = s\int_0^\infty \mathbb{P}(Y_1 > st)dt \geqslant s\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(Y_1 > sn)$$

dove usiamo il fatto che se $t \in [n-1, n]$, si ha $\mathbb{P}(Y_1 > st) \geqslant \mathbb{P}(Y_1 > sn)$. Allora $\mathbb{E}[Y_1] < \infty$ implica (2) per ogni $s > 0$.

Nome:____

4. Enunciare e dimostrare la legge 0/1 di Kolmogorov

Nome:____

5. Siano X_i variabili i.i.d. con esponenziali media 1. Sia a_n una successione numerica e sia Z_n la variabile

$$Z_n = a_n \sum_{i=1}^{n} (X_i - X_{n+i})$$

Discutere la convergenza della Z_n nei seguenti casi:

(a) $a_n = \frac{1}{n}$

(b) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

(c) $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$

Soluzione:

a). Notiamo che

$$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{X}_i,$$

dove $\widetilde{X}_i = X_i - X_{n+i}$, $i = 1, \ldots, n$, sono i.i.d. con momento primo finito e con media 0. La legge dei grandi numeri forte allora implica

$$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{X}_i \ \to \ 0\,, \qquad \text{q.c.}$$

b). In questo caso

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{X}_i.$$

Le $\widetilde{X}_i$ hanno media nulla e varianza 2, pertanto il teorema del limite centrale stabilisce che

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{X}_i \ \to \ N(0,2)\,, \qquad \text{in distribuzione}$$

c). Abbiamo

$$Z_n = \delta_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{X}_i = \delta_n Z'_n,$$

Con

$$\delta_n = \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} \to 1, \qquad n \to \infty\,.$$

Dal punto a) sappiamo che $Z'_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \widetilde{X}_i$ converge a zero quasi certamente. Allora Z_n anche converge a zero quasi certamente.

Nome:____

6. Sia X una variabile aleatoria con funzione caratteristica

$$\varphi_X(\theta) = \frac{e^{i\theta} - 1}{i\theta}\,, \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

Calcolare i valori attesi

(a) $\mathbb{E}[X]$

(b) $\mathbb{E}\left[\sqrt{X}\right]$

(c) $\mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{X}}\right]$

Soluzione:

(a). Notiamo che

$$\varphi_X(\theta) = \int_0^1 e^{i\theta x} dx,$$

e dunque X ha distribuzione uniforme in $[0,1]$. In particolare,

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2},$$

$$\mathbb{E}\left[\sqrt{X}\right] = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{3}{2}$$

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{X}}\right] = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2.$$

Nome:_______________________________________