Dipartimento di Matematica e Fisica, Roma Tre
Pietro Caputo

2019-20, I semestre
28 gennaio 2020

CP410: Esame 1, 28 gennaio 2020

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nome:______________________________________

1. Consideriamo infiniti lanci indipendenti di una moneta con probabilità p di uscire "testa" e $1-p$ di uscire "croce". Mostrare che:

   (a) Per ogni $p \in (0,1)$, la probabilità di "infinite teste" è uguale a 1.

   (b) Trovare un evento E che ha probabilità 1 nel caso in cui la moneta ha $p = 1/3$ e che ha probabilità 0 nel caso in cui la moneta ha $p = 2/3$.

   (c) Se $0 < p_1 < p_2 < 1$, trovare un evento F che ha probabilità 1 nel caso in cui la moneta ha $p = p_1$ e che ha probabilità 0 nel caso in cui la moneta ha $p = p_2$.

Soluzione: Poniamo $Z_n = \mathbf{1}(\text{testa al lancio } n)$.
a). Osserviamo che $\mathbb{P}(\text{infinite teste}) = \mathbb{P}(\{Z_n = 1,\ i.o.\})$ e che $\mathbb{P}(Z_n = 1) = p > 0$ per ogni n fissato. Allora $\sum_n \mathbb{P}(Z_n = 1) = +\infty$ e il lemma di Borel-Cantelli II implica $\mathbb{P}(\{Z_n = 1,\ i.o.\}) = 1$.

b). Per la legge dei grandi numeri si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n = p \quad q.c.$$

dove $S_n = \sum_{k=1}^n Z_n$. Allora possiamo scegliere $E = \{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n = 1/3\}$.

c). Ragionando come sopra possiamo scegliere $F = \{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n = p_1\}$.

Nome:_______________________________________

2. Enunciare e dimostrare il teorema del limite centrale per somme di variabili indipendenti e identicamente distribuite.

Nome:____

3. Consideriamo variabili aleatorie i.i.d. $Y_1, Y_2, \dots$ con distribuzione Poisson di parametro 1. Definiamo

$$W_n = \prod_{k=1}^{n} Y_k \,, \qquad Z_n = e^{-n} \prod_{k=1}^{n} 2^{Y_k} \,, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

   (a) Calcolare il valor atteso di W_n e Z_n per ogni $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Dire se W_n converge e discuterne il limite.

   (c) Dire se Z_n converge e discuterne il limite.

Soluzione:
a). Per l'indipendenza si ha $\mathbb{E}[W_n] = \mathbb{E}[Y_1]^n = 1^n = 1$. Analogamente

$$\mathbb{E}[Z_n] = e^{-n} \mathbb{E}\left[2^{Y_1}\right]^n \,.$$

Inoltre

$$\mathbb{E}\left[2^{Y_1}\right] = e^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{k!} = e^{-1} e^2 = e.$$

Dunque $\mathbb{E}[Z_n] = e^{-n} e^n = 1$.

b). W_n è una martingala limitata in L^1. Allora per il teorema di convergenza si ha che W_n converge quasi certamente. Per calcolare il limite osserviamo che se una delle Y_i vale 0 allora $W_n \to 0$. Ma essendo positiva la probabilità di $Y_1 = 0$ e essendo le Y_i indipendenti il lemma di Borel-Cantelli II garantisce che quasi certamente infinite volte $Y_i = 0$. In particolare $W_n \to 0$ q.c.

c) Se poniamo $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$ si ha $Z_n = e^{-n} 2^{S_n} = e^{-n + S_n \log(2)}$. Dalla legge dei grandi numeri sappiamo che $\frac{1}{n} S_n \to 1$ quasi certamente. Essendo $\log(2) < 1$ si ha

$$n - S_n \log(2) = n \left(1 - \log(2) \frac{S_n}{n}\right) \to +\infty$$

quasi certamente e dunque $Z_n \to 0$ q.c.

Nome:____

4. Sia S_n la posizione di una passeggiata aleatoria semplice e simmetrica su $\mathbb{Z}$ dopo n passi, con posizione iniziale $S_0 = 0$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$:

   (a) Determinare la probabilità di visitare la posizione $+k$ prima del primo ritorno nell'origine, ossia calcolare $\mathbb{P}(\tau_k < \tau_0)$, dove per ogni $j \in \mathbb{N}$ si definisce

   $$\tau_j = \inf\{n \geqslant 1 : \ S_n = j\}$$

   (b) Calcolare la media e la varianza della variabile aleatoria $X = S_{\min\{\tau_k, \tau_0\}}$.

Soluzione: a). Notiamo che se $S_1 = -1$ allora non è possibile visitare $+k$ prima del primo ritorno in 0. Quindi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau_k < \tau_0) &= \mathbb{P}(S_1 = +1)\mathbb{P}(\tau_k < \tau_0 | S_1 = +1) + \mathbb{P}(S_1 = -1)\mathbb{P}(\tau_k < \tau_0 | S_1 = -1) \\ &= \mathbb{P}(S_1 = +1)\mathbb{P}(\tau_k < \tau_0 | S_1 = +1) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(\tau_k < \tau_0 | S_1 = +1).\end{aligned}$$

Per simmetria abbiamo che $\mathbb{P}(\tau_k < \tau_0 | S_1 = +1) = \mathbb{P}(\tau_{k-1} < \tau_{-1})$ e quest'ultima probabilità si può calcolare usando il teorema di optional stopping applicato alla martingala S_n, che ha incrementi limitati, con $S_0 = 0$, e con tempo d'arresto $\tau := \min\{\tau_{k-1}, \tau_{-1}\}$ (che ha valore atteso finito). Allora abbiamo

$$0 = \mathbb{E}[S_0] = \mathbb{E}[S_\tau] = \mathbb{P}(\tau_{k-1} < \tau_{-1})(k-1) + (1 - \mathbb{P}(\tau_{k-1} < \tau_{-1}))(-1),$$

e dunque $\mathbb{P}(\tau_{k-1} < \tau_{-1}) = \frac{1}{k}$. In conclusione,

$$\mathbb{P}(\tau_k < \tau_0) = \frac{1}{2k}.$$

[Nota: Non si può applicare direttamente l'optional stopping al tempo $\tau' = \min\{\tau_k, \tau_0\}$ con la martingala S_n, poiché $\mathbb{E}[\tau'] = +\infty$. Infatti si può osservare che

$$\mathbb{E}[\tau'] = \mathbb{P}(S_1 = -1)\mathbb{E}[\tau' | S_1 = -1] + \mathbb{P}(S_1 = +1)\mathbb{E}[\tau' | S_1 = +1] \geqslant \mathbb{P}(S_1 = -1)\mathbb{E}[\tau' | S_1 = -1] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[\tau_1]\,,$$

dove abbiamo usato $\mathbb{P}(S_1 = -1) = \frac{1}{2}$ e $\mathbb{E}[\tau' | S_1 = -1] = \mathbb{E}[\tau_1]$. Ma è noto che $\mathbb{E}[\tau_1] = +\infty$. Se avessimo potuto usare l'optional stopping al tempo τ' avremmo ottenuto il risultato errato $0 = \mathbb{E}[S_{\tau'}] = k\mathbb{P}(\tau' = \tau_k)$, ossia $\mathbb{P}(\tau' = \tau_k) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.]

b). La variabile aleatoria $X = S_{\min\{\tau_k, \tau_0\}}$ vale k con probab. $\mathbb{P}(\tau_k < \tau_0) = \frac{1}{2k}$ e vale 0 con probab. $1 - \mathbb{P}(\tau_k < \tau_0)$. Allora

$$\mathbb{E}[X] = k\,\frac{1}{2k} = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{E}[X^2] = k^2\,\frac{1}{2k} = \frac{k}{2},$$

e $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{k}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2k-1}{4}$.

Nome:____

5. Per ogni n, sia X_n una variabile aleatoria con funzione caratteristica

$$\varphi_{X_n}(\theta) = \left(\frac{2}{2 - i\theta}\right)^n.$$

   (a) Calcolare il valore atteso di X_n per ogni $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Mostrare che $\frac{2X_n}{n}$ converge a 1 in probabilità.

   (c) Dimostrare che $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \geqslant n/2) = \frac{1}{2}$.

Soluzione: a). La funzione $\theta \mapsto \frac{2}{2-i\theta}$ è la funzione caratteristica di un'esponenziale di parametro 2. Allora X_n è una somma di n esponenziali di parametro 2 indipendenti, ossia la variabile $\Gamma(n, 2)$. In particolare $\mathbb{E}[X_n] = n/2$.
b). Usando Chebyshev e ricordando che $\text{Var}(X_n) = n\text{Var}(X_1) = n/4$, si ha

$$\mathbb{P}(|\tfrac{2X_n}{n} - 1| > \varepsilon) \leqslant \frac{\text{Var}[X_n]}{\varepsilon^2 n^2/4} = \frac{1}{\varepsilon^2 n} \to 0.$$

c). Per il teorema del limite centrale $Z_n := \frac{X_n - n/2}{\sqrt{n/4}}$ converge in distribuzione a una normale standard. Dunque

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \geqslant n/2) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n \geqslant 0) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{2}.$$

Nome:____

6. Una sequenza viene generata a caso utilizzando i 2 caratteri T, C. Sia $\mathcal{T}_{\mathrm{TCT}}$ il tempo in cui appare per la prima volta la successione TCT e $\mathcal{T}_{\mathrm{TTC}}$ il tempo in cui appare per la prima volta la successione TTC.

   (a) Calcolare i valori medi $\mathbb{E}[\mathcal{T}_{\mathrm{TCT}}]$ e $\mathbb{E}[\mathcal{T}_{\mathrm{TTC}}]$.

   (b) Calcolare $\mathbb{P}(\mathcal{T}_{\mathrm{TTC}} > \mathcal{T}_{\mathrm{TCT}})$.

Soluzione: a) Con gli argomenti usuali si ottiene:

$$\mathbb{E}[\mathcal{T}_{\mathrm{TCT}}] = 2^3 + 2 = 10\,, \qquad \mathbb{E}[\mathcal{T}_{\mathrm{TTC}}] = 2^3 = 8.$$

b). Siano $M^{\mathrm{TCT}}, M^{\mathrm{TTC}}$ le martingale usuali associate ai due tempi e sia τ il minimo dei due tempi $\mathcal{T}_{\mathrm{TCT}}$ e $\mathcal{T}_{\mathrm{TTC}}$. Allora

$$M_\tau^{\mathrm{TCT}} - M_\tau^{\mathrm{TTC}} = \begin{cases} 2^3 + 2 - 2 & \tau = \mathcal{T}_{\mathrm{TCT}} \\ 2^2 - 2^3 & \tau = \mathcal{T}_{\mathrm{TTC}} \end{cases}$$

Per l'optional stopping, ponendo $p = \mathbb{P}(\mathcal{T}_{\mathrm{TTC}} > \mathcal{T}_{\mathrm{TCT}})$ si ha

$$0 = \mathbb{E}[M_\tau^1 - M_\tau^2] = p2^3 + (1-p)(2^2 - 2^3) = -4 + 12p.$$

Allora

$$\mathbb{P}(\mathcal{T}_{\mathrm{TTC}} > \mathcal{T}_{\mathrm{TCT}}) = p = \frac{1}{3}.$$

Nome:____