Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2014-15, I semestre
3 febbraio, 2015

CP410: Esame 2, 3 febbraio 2015

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nome:____

1. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ lo spazio di probabilità definito da $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, $\mathcal{F}$ la sigma algebra dei Boreliani e $\mathbb{P}$ la misura di Lebesgue su $[0,1] \times [0,1]$. Siano Y, Z le variabili aleatorie

$$Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } \omega \in (1/2, 1] \times [0,1] \\ 1 & \text{se } \omega \in [0, 1/2] \times [0,1] \end{cases} \qquad Z(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } \omega \in [0,1] \times (1/2, 1] \\ 1 & \text{se } \omega \in [0,1] \times [0, 1/2] \end{cases}$$

   (a) Scrivere la densità di probabilità congiunta di Y, Z

   (b) Dire se Y, Z sono indipendenti.

   (c) Descrivere la variabile aleatoria $\mathbb{E}[\, Y \,|\, Y + Z]$

Soluzione: (a). La densità congiunta (rispetto alla misura di Lebesgue $dydz$) è:

$$f_{Y,Z}(y,z) = 4 \times 1_{\{0 \leqslant y \leqslant 1/2\}} \times 1_{\{0 \leqslant z \leqslant 1/2\}}.$$

(b). Essendo la densità un prodotto, le variabili sono indipendenti.

(c). Notiamo che la variabile $X := Y + Z$ ha valori in $\{0, 1, 2\}$. L'attesa condizionata $E[Y|X]$ è la variabile aleatoria W tale che: se $X = 2$, ossia se $\omega \in [0, 1/2] \times [0, 1/2]$, allora

$$W(\omega) = \mathbb{P}(Y = 1 | X = 2) = 1;$$

se $X = 1$, ossia $\omega \in \{[0, 1/2] \times (1/2, 1]\} \cup \{(1/2, 1] \times [0, 1/2]\}$, allora

$$W(\omega) = \mathbb{P}(Y = 1 | X = 1) = \frac{1}{2};$$

se $X = 0$, ossia $\omega \in (1/2, 1] \times (1/2, 1]$, allora

$$W(\omega) = \mathbb{P}(Y = 1 | X = 0) = 0.$$

In forma piú compatta possiamo scrivere

$$W = \mathbb{E}[Y | Y + Z] = \tfrac{1}{2}\,(Y + Z).$$

Nome:____________________________________

2. Sia $\{X_k,\ k = 1, 2, \dots\}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti con

$$\mathbb{P}(X_k = 1 + \tfrac{1}{k^2}) = \mathbb{P}(X_k = 1 - \tfrac{1}{k^2}) = \tfrac{1}{2}\,.$$

Consideriamo le successioni

$$Q_n := n - \sum_{k=1}^{n} X_k\,, \quad W_n = \prod_{k=1}^{n} X_k\,.$$

(a) Dimostrare che Q_n e W_n convergono quasi certamente per $n \to \infty$.

(b) Dire se convergono anche in L^1.

Soluzione: Notiamo che $\mathbb{E}[X_k] = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{k^2}) + \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{k^2}) = 1$. Mostriamo che Q_n e W_n sono entrambe martingale limitate in L^1. Per W_n questo è evidente essendo il prodotto di variabili indipendenti e nonnegative di media 1. Per Q_n questo segue dal fatto che $Q_n = \sum_{k \leqslant n} X'_k$ dove $X'_k = 1 - X_k$ sono indipendenti e di media zero, con $|X'_k| = \frac{1}{k^2}$ e dunque

$$\sup_n \mathbb{E}[|Q_n|] \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[|X'_k|] = \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k^2} < \infty.$$

Allora, per il teorema di Doob si ha convergenza quasi certamente per entrambe le successioni. Osserviamo che Q_n, W_n sono entrambe limitate, infatti $|Q_n| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$, e

$$W_n \leqslant \prod_{k=1}^{\infty} (1 + \tfrac{1}{k^2}) < \infty.$$

Allora, per il teorema di convergenza dominata si ha convergenza anche in L^1.

Nome:______________________________________

3. Sia X una variabile aleatoria integrabile su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e sia $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ una sotto sigma algebra. Dimostrare che se Y, Y' sono due versioni dell'attesa condizionata $\mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{G}]$, allora $Y = Y'$ quasi certamente.

Soluzione: Se Y, Y' sono versioni di $\mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{G}]$, in particolare sono entrambe $\mathcal{G}$-misurabili. Allora $E_n := \{\omega \in \Omega : \; Y(\omega) - Y'(\omega) \geqslant n^{-1}\} \in \mathcal{G}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ deve valere

$$\mathbb{E}[Y; E_n] = \mathbb{E}[Y'; E_n].$$

Allora

$$0 = \mathbb{E}[Y; E_n] - \mathbb{E}[Y'; E_n] = \mathbb{E}[(Y - Y'); E_n] \geqslant n^{-1}\mathbb{P}[E_n],$$

e dunque $\mathbb{P}[E_n] = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ne segue che $\mathbb{P}(Y > Y') = \mathbb{P}(\cup_{n \in \mathbb{N}} E_n) = 0$. Analogamente si mostra che $\mathbb{P}(Y' > Y) = 0$. Concludiamo che $\mathbb{P}(Y' = Y) = 1$.

Nome:____

4. Siano X_k, $k = 1, 2, \ldots$ variabili di Bernoulli di parametro $p \in (0,1)$ indipendenti e poniamo $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Per $\ell \in \mathbb{N}$ fissato, sia

$$\tau_\ell = \inf\{n \geqslant 1 : \ S_n = \ell\}$$

   (a) Dimostrare che per ogni $\ell \in \mathbb{N}, p \in (0,1)$ esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\mathbb{P}(\tau_\ell \geqslant n) \leqslant C\, e^{-\frac{n}{C}}, \quad \forall n \geqslant 1.$$

   (b) Calcolare $\mathbb{E}[\tau_\ell]$ in funzione di p, ℓ, utilizzando un'opportuna martingala.

   (c) Dimostrare che $\lim_{\ell\to\infty} \frac{1}{\ell}\, \tau_\ell = \frac{1}{p}$ quasi certamente.

Soluzione: (a). Osserviamo che $\tau_\ell \geqslant n$ equivale a $S_n \leqslant \ell$. Poiché S_n è una binomiale

$$\mathbb{P}(S_n \leqslant \ell) = \sum_{k=0}^{\ell} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Per ottenere la stima esponenziale richiesta possiamo stimare

$$\mathbb{P}(S_n \leqslant \ell) \leqslant (\ell+1) \max_{k=0,\ldots,\ell} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \leqslant (\ell+1) n^\ell (1-p)^{n-\ell}.$$

A questo punto la stima segue facilmente scegliendo C in funzione di ℓ, p.
Alternativamente, si puo' usare la disuguaglianza di Markov e scrivere per ogni $\lambda > 0$:

$$\mathbb{P}(S_n \leqslant \ell) = \mathbb{P}(e^{-\lambda S_n} \geqslant e^{-\lambda \ell}) \leqslant e^{\lambda \ell} \mathbb{E}(e^{-\lambda S_n}).$$

Valutiamo $\mathbb{E}(e^{-\lambda S_n}) = \mathbb{E}(e^{-\lambda X_1})^n = (1-p+pe^{-\lambda})^n$. Per $p \in (0,1)$ fissato e $\lambda > 0$ si ha $1-p+pe^{-\lambda} \in (0,1)$ e dunque $(1-p+pe^{-\lambda})^n$ è esponenzialmente piccolo in n. A questo punto la stima segue facilmente prendendo per esempio $\lambda = 1$ e C un'opportuna funzione di ℓ, p. .

(b). Dal punto (a) segue che $\mathbb{E}[\tau_\ell] < \infty$, usando $\mathbb{E}[\tau_\ell] = \sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}(\tau_\ell \geqslant k)$. Allora, essendo $M_n = S_n - pn$ una martingala con incrementi limitati si ha per il teorema di optional stopping:

$$0 = \mathbb{E}[M_{\tau_\ell}] = \mathbb{E}[S_{\tau_\ell}] - p\mathbb{E}[\tau_\ell] = \ell - p\mathbb{E}[\tau_\ell].$$

Da cui $\mathbb{E}[\tau_\ell] = \ell/p$.
(c). Considerando il tempo di primo arrivo in 1, il tempo tra il primo arrivo in 1 e il primo arrivo in 2 etc... si ottiene che τ_ℓ è la somma di ℓ variabili geometriche di parametro p indipendenti. In particolare potevamo ottenere la formula $\mathbb{E}[\tau_\ell] = \ell/p$ semplicemente osservando che la geometrica di parametro p ha valore atteso $1/p$. Il fatto che

$$\lim_{\ell\to\infty} \frac{1}{\ell}\, \tau_\ell = \frac{1}{p}$$

quasi certamente segue immediatamente da questa rappresentazione e dalla legge forte dei grandi numeri.

Nome:____

5. Siano $\{Y_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ variabili aleatorie iid tali che $Y_k = 1$ con probabilità $3/4$ e $Y_k = 0$ con probabilità $1/4$. Definiamo

$$Q_n = \sum_{k=1}^{n} (Y_k - Y_{n+k})$$

   (a) Dimostrare che $\frac{1}{\sqrt{n}} Q_n$ converge in distribuzione e descrivere il limite.

   (b) Se $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$, dimostrare che la variabile $Z_n := \exp(-\frac{1}{n}(S_{2n} - 2S_n)^2)$ converge in distribuzione.

   (c) Dimostrare che la variabile $X_n := \exp(-\frac{1}{n}(S_{2n} - S_n)^2)$ converge in distribuzione.

Soluzione: (a). Se $X_k := Y_k - Y'_k$ dove Y'_k sono copie iid di Y_k allora Q_n ha la stessa distribuzione di

$$W_n := \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Ora W_n è una somma di variabili iid con media nulla e varianza $\mathrm{Var}(X_k) = 2\mathrm{Var}(Y_k) = 3/8$. Per il teorema del limite centrale si ha che $\frac{1}{\sqrt{n}} W_n$ converge in distribuzione alla normale $N(0, \frac{3}{8})$. Allora anche $\frac{1}{\sqrt{n}} Q_n$ converge in distribuzione alla normale $N(0, \frac{3}{8})$.

(b). Se una successione di variabili aleatorie ξ_n converge in distribuzione allora anche $h(\xi_n)$ converge in distribuzione per ogni funzione $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continua e limitata. Prendendo $h(x) = \exp(-x^2)$, e osservando che $Q_n = 2S_n - S_{2n}$ si ha che

$$Z_n = \exp(-\tfrac{1}{n}(S_{2n} - 2S_n)^2) = h(\tfrac{1}{\sqrt{n}} Q_n)$$

converge in distribuzione alla variabile $h(\xi)$ se ξ è la normale $N(0, \frac{3}{8})$.

(c). Per la legge dei grandi numeri forte si ha $\frac{1}{n}(S_{2n} - S_n) \to \frac{3}{4}$ quasi certamente. Allora $\frac{1}{n}(S_{2n} - S_n)^2 \to \infty$ quasi certamente. Pertanto $X_n \to 0$ q.c. e dunque X_n converge a zero in distribuzione.

Nome:____

6. Enunciare e dimostrare la legge 0 - 1 di Kolmogorov.

Nome:______________________________________