Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2015-16, I semestre
4 febbraio 2016

CP410: Esame 2, 4 febbraio 2016

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nome:____

1. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ lo spazio di probabilità $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F}$ la sigma algebra dei Boreliani e $\mathbb{P}$ la misura di Lebesgue su Ω. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia X_n la variabile aleatoria definita da $X_n(\omega) = \omega^n$, $\omega \in \Omega$.

   (a) Scrivere la densità di probabilità X_n

   (b) Dire se X_n converge quasi certamente.

   (c) Dire se X_n converge in L^1.

Soluzione: (a). Per $t \in [0,1]$ si ha $\mathbb{P}(X_n \leqslant t) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant t^{1/n}) = t^{1/n}$. Dunque la densità di X_n vale

$$f_{X_n}(x) = \tfrac{1}{n}\, x^{1/n-1}\, 1_{x\in[0,1]}.$$

(b). Fissato $\omega \in [0,1)$ si ha $X_n(\omega) \to 0$, dunque $X_n \to 0$ q.c. poiché l'insieme $[0,1)$ ha probabilità 1.
(c). Si, converge a zero in L^1 infatti

$$\mathbb{E}[|X_n|] = \mathbb{E}[X_n] = \int_0^1 x f_{X_n}(x) dx = 1/(n+1) \to 0.$$

Nome:____

2. Siano X, Y due variabili aleatorie di media zero e varianza 1.

   (a) Dimostrare che
   $$\mathbb{P}(|XY| \geqslant t) \leqslant \tfrac{1}{t} \qquad \forall t > 1.$$

   (b) Supponendo X, Y indipendenti, dimostrare che
   $$\mathbb{P}(|XY| \geqslant t) \leqslant \tfrac{1}{t^2} \qquad \forall t > 1.$$

Soluzione: a) Per ogni $t > 0$, per la disuguaglianza di Markov si ha
$$\mathbb{P}(|XY| \geqslant t) \leqslant \tfrac{1}{t}\, \mathbb{E}[|XY|].$$

Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz abbiamo $\mathbb{E}[|XY|] \leqslant \mathbb{E}[X^2]^{1/2}\mathbb{E}[Y^2]^{1/2} = 1$, dove abbiamo usato l'ipotesi di media nulla e varianza 1. Allora
$$\mathbb{P}(|XY| \geqslant t) \leqslant \tfrac{1}{t}\,.$$

La disuguaglianza vale per ogni $t > 0$, e in particolare per $t > 1$ (altrimenti è banale).

b) Sempre per la disuguaglianza di Markov, per ogni $t > 0$ si ha
$$\mathbb{P}(|XY| \geqslant t) = \mathbb{P}(|XY|^2 \geqslant t^2) \leqslant \tfrac{1}{t^2}\, \mathbb{E}[|XY|^2].$$

Se X, Y sono indipendenti, allora $\mathbb{E}[|XY|^2] = \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2] = 1$, che implica la conclusione.

Nome:____

3. Consideriamo la passeggiata aleatoria asimmetrica S_n definita da $S_0 = 0$ e $S_n = \sum_{i=1}^n Z_i$, dove Z_i sono variabili i.i.d. tali che $Z_i = +1$ con probabilità $2/3$ e $Z_i = -1$ con probabilità $1/3$. Sia
$$\tau = \inf\{n \geqslant 1 : \; S_n = 0\},$$
il tempo di primo ritorno nell'origine.

   (a) Calcolare $\mathbb{P}(\tau = 2)$.

   (b) Calcolare $\mathbb{P}(\tau \geqslant 4)$.

   (c) Dimostrare che $\mathbb{E}[\tau] = \infty$

Soluzione: a). Per l'evento $\tau = 2$ ci sono due possibilita': $\{Z_1 = +1, Z_2 = -1\}$ oppure $\{Z_1 = -1, Z_2 = +1\}$. Entrambi i casi hanno prob. $2/3 \times 1/3 = 2/9$, dunque $\mathbb{P}(\tau = 2) = 4/9$.
b). Notiamo che τ puo' assumere soltanto valori pari e necessariamente $\tau \in \{2, 4, 6, \dots\}$. Allora $\mathbb{P}(\tau \geqslant 4) = 1 - \mathbb{P}(\tau = 2) = 5/9$.
c) Il risultato segue da
$$\mathbb{E}[\tau] = \tfrac{2}{3}\,\mathbb{E}[\tau|Z_1 = +1] + \tfrac{1}{3}\,\mathbb{E}[\tau|Z_1 = -1] \geqslant \tfrac{2}{3}\,\mathbb{E}[\tau|Z_1 = +1],$$
e dal fatto che
$$\mathbb{E}[\tau|Z_1 = +1] = +\infty.$$
Per dimostrare l'ultima identità, ossia che $\mathbb{E}[\tau|Z_1 = +1] = +\infty$, possiamo argomentare come segue. Sia τ' il primo tempo n in cui $S_n = -1$ in modo che, per semplice traslazione si ha
$$\mathbb{E}[\tau|Z_1 = +1] = 1 + \mathbb{E}[\tau'].$$
Mostriamo che $\mathbb{E}[\tau'] = +\infty$. Sia $M_n = S_n - \frac{1}{3}\,n$ per $n \geqslant 1$ e sia $M_0 = 0$. Notiamo che M_n e' una martingala a incrementi limitati. Allora se fosse $\mathbb{E}[\tau'] < \infty$ si avrebbe, per il teorema di optional stopping, $\mathbb{E}[M_{\tau'}] = M_0 = 0$. Ma $S_{\tau'} = -1$ e quindi
$$\mathbb{E}[M_{\tau'}] = \mathbb{E}[S_{\tau'}] - \tfrac{1}{3}\,\mathbb{E}[\tau'] = -1 - \tfrac{1}{3}\,\mathbb{E}[\tau'] \leqslant \; -1,$$
e quindi una contraddizione. Ne segue che $\mathbb{E}[\tau'] = +\infty$.

Nome:______________________________________

4. Siano $E_1, \dots, E_n$ variabili aleatorie esponenziali indipendenti, ciascuna di parametro $\lambda = \sqrt{n}$ e sia Z_n la variabile aleatoria

$$Z_n = (E_1 + \cdots + E_n - \sqrt{n}).$$

Dimostrare che Z_n converge in distribuzione per $n \to \infty$, e descriverne il limite.

Soluzione: Per il teorema del limite centrale dobbiamo aspettarci che $Z_n \to N(0,1)$ in distribuzione: infatti E_i sono variabili i.i.d. con media $1/\lambda = 1/\sqrt{n}$ e deviazione standard $1/\lambda = 1/\sqrt{n}$, quindi la Z_n ha media nulla e varianza 1.
Per una dimostrazione precisa procediamo calcolando la funzione caratteristica di Z_n:

$$\varphi_{Z_n}(\theta) = \mathbb{E}[e^{i\theta Z_n}] = e^{-i\theta\sqrt{n}}\mathbb{E}[e^{i\theta E_1}]^n.$$

Per la variabile esponenziale E_1 di parametro $\lambda = \sqrt{n}$ si ha

$$\mathbb{E}[e^{i\theta E_1}]^n = \frac{1}{(1 - i\theta/\lambda)^n} = \frac{1}{(1 - i\theta/\sqrt{n})^n}.$$

Usando lo sviluppo $e^x = 1 + x + x^2/2 + o(x^2)$ si ha

$$1 - i\theta/\sqrt{n} = e^{-i\theta/\sqrt{n}}(1 + \tfrac{\theta^2}{2n} + o(1/n)),$$

e dunque

$$\mathbb{E}[e^{i\theta E_1}]^n = e^{i\theta\sqrt{n}}(1 + \tfrac{\theta^2}{2n} + o(1/n))^{-n}.$$

Dunque

$$\varphi_{Z_n}(\theta) = (1 + \tfrac{\theta^2}{2n} + o(1/n))^{-n} \to e^{-\frac{\theta^2}{2}},$$

per ogni $\theta \in \mathbb{R}$, che equivale al risultato $Z_n \to N(0,1)$ in distribuzione.

Nome:____

5. Per ogni $t \geqslant 0$ definiamo

$$Q_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| \leqslant t \text{ e } |y| \leqslant t\}.$$

Siano $\{Y_k, \ k \in \mathbb{N}\}$ variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione uniforme sul quadrato Q_1 e poniamo

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} 1_{Y_n \in Q_{r_n}} ,$$

dove r_n è una successione tale che $r_n \geqslant 0$ e $r_n \to 0$. Trovare una condizione necessaria e sufficiente sulla successione $\{r_n\}$ per avere che $U_n \to \infty$ quasi certamente.

Soluzione:
Notiamo che Q_t ha area $4t^2$ e gli eventi $E_n = \{Y_n \in Q_{r_n}\}$ soddisfano

$$\mathbb{P}(E_n) = \frac{\text{area}(Q_{r_n})}{\text{area}(Q_1)} = 4r_n^2/4 = r_n^2,$$

per ogni n tale che $0 \leqslant r_n \leqslant 1$. Inoltre $U_n \to \infty$ se e solo se $\{E_n, \ i.o.\}$. La conclusione segue dunque dai lemmi di Borel-Cantelli I e II: Si ha $U_n \to \infty$ se e solo se $\sum_n r_n^2 < \infty$.

Nome:______________________________________

6. Enunciare e dimostrare una versione della legge forte dei grandi numeri.

Nome:____