Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2016-17, I semestre
7 febbraio 2017

CP410: Esame 2, 7 febbraio 2017

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nome:____

1. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ lo spazio di probabilità definito da: $\Omega = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\mathcal{F}$ la sigma algebra dei Boreliani e $\mathbb{P}$ la misura di probabilità uniforme Ω. Poniamo $X(\omega) = \tan(\omega)$, $Y(\omega) = \tan(-\omega)$, $\omega \in \Omega$.

   (a) Scrivere la densità di probabilità di X e di Y.

   (b) Calcolare la funzione caratteristica di $X - Y$.

   (c) Calcolare $\mathbb{P}(X > Y + 2)$.

Soluzione: (a). Scriviamo

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \mathbb{P}(\omega \leqslant \arctan(x)) = \tfrac{1}{\pi}(\arctan(x) + \tfrac{\pi}{2}).$$

Allora X è la variabile di Cauchy con densità di probabilità

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Inoltre $Y = -X$ ha la stessa densità di probabilità. Ossia X e Y sono uguali in distribuzione.

(b). Dal punto precedente sappiamo che

$$\varphi_{X-Y}(\theta) = \varphi_{2X}(\theta) = \varphi_X(2\theta) = e^{-|2\theta|}\,, \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

(c). Si ha

$$\mathbb{P}(X > Y + 2) = \mathbb{P}(X - Y > 2) = \mathbb{P}(2X > 2) = \mathbb{P}(X > 1) = \mathbb{P}(\omega > \tfrac{\pi}{4}) = \tfrac{1}{4}.$$

Nome:______________________________________

2. Siano $X_1, X_2, \dots$ variabili aleatorie i.i.d. tali che $X_i = -1, 0, +1$ con probabilità $\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}$ rispettivamente. Poniamo $S_0 = 0$ e $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Dato $k \in \mathbb{N}$, sia τ_k il primo tempo $n \in \mathbb{N}$ tale che $|S_n| = k$.

   (a) Calcolare il valore atteso di τ_k al variare di k.

   (b) Dire se τ_k e S_{τ_k} sono indipendenti.

Soluzione: a). Poiché $S_n^2 - n\mathrm{Var}(X_1)$ è una martingala, il teorema di optional stopping e gli argomenti usuali mostrano che $k^2 = \mathbb{E}[S_{\tau_k}^2] = \mathbb{E}[\tau_k]\mathrm{Var}(X_1)$. Inoltre $\mathrm{Var}(X_1) = \frac{2}{5}$, dunque

$$\mathbb{E}[\tau_k] = \frac{5k^2}{2}.$$

b). Poiché S_n è una martingala, sappiamo che $\mathbb{E}[S_{\tau_k}] = k(\mathbb{P}(S_{\tau_k} = k) - \mathbb{P}(S_{\tau_k} = -k)) = 0$, e dunque

$$\mathbb{P}(S_{\tau_k} = k) = \mathbb{P}(S_{\tau_k} = -k) = \frac{1}{2}.$$

Mostriamo che S_{τ_k} e τ_k sono indipendenti. E' sufficiente mostrare che

$$\mathbb{P}(\tau_k = j, S_{\tau_k} = k) = \mathbb{P}(\tau_k = j, S_{\tau_k} = -k), \tag{1}$$

per ogni $j \in \mathbb{N}$. Infatti, dall'equazione (1) segue che, per ogni $j \in \mathbb{N}$, $a \in \{-k, k\}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau_k = j, S_{\tau_k} = a) &= \frac{1}{2}(\mathbb{P}(\tau_k = j, S_{\tau_k} = -k) + \mathbb{P}(\tau_k = j, S_{\tau_k} = k)) \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(\tau_k = j) = \mathbb{P}(S_{\tau_k} = a)\mathbb{P}(\tau_k = j),\end{aligned}$$

e quindi l'indipendenza.

Per mostrare la (1), osserviamo che la probabilità dell'evento $\{\tau_k = j\}$ è la somma delle probabilità di tutte le traiettorie $T = (X_1, \dots, X_j)$ che hanno $|\sum_{i=1}^j X_i| = k$ e $|\sum_{i=1}^m X_i| < k$ per ogni $m = 1, \dots, j-1$. Per simmetria la probabilità di una traiettoria $T = (X_1, \dots, X_j)$ è uguale alla probabilità della traiettoria invertita $\tilde{T} = (-X_1, \dots, -X_j)$, e se per una traiettoria $T = (X_1, \dots, X_j)$ si ha $\tau_k = j$ e $S_{\tau_k} = k$ allora per $\tilde{T}$ si ha $\tau_k = j$ e $S_{\tau_k} = -k$. La (1) allora segue per simmetria.

Nome:____

3. Siano X_i variabili i.i.d. con media nulla e varianza 1. Siano inoltre Y_i variabili i.i.d., indipendenti dalle X_i, e con distribuzione normale standard. Discutere la convergenza delle seguenti successioni di variabili aleatorie:

   (a) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i + Y_i)$

   (b) $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(X_i + Y_i)$

   (c) $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i + \frac{1}{\sqrt{n}}Y_i\right)$

Soluzione:

a). Notiamo che $Z_i = X_i + Y_i$ sono i.i.d. con momento primo finito e con media $\mathbb{E}[Z_i] = 0$. La legge dei grandi numeri forte allora implica

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i + Y_i) \;\to\; 0\,, \qquad \text{q.c.}$$

b). Le Z_i hanno media nulla e varianza 2, pertanto il teorema del limite centrale stabilisce che

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(X_i + Y_i) \;\to\; N(0,2)\,, \qquad \text{in distribuzione}$$

c). Sappiamo che $A_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i$ converge in distribuzione a $N(0,1)$. Inoltre $B_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ ha distribuzione $N(0,\frac{1}{n})$. Allora usando le funzioni caratteristiche otteniamo che

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i + \frac{1}{\sqrt{n}}Y_i\right) = A_n + B_n \to N(0,1)\,, \qquad \text{in distribuzione}$$

Nome:____

4. Sia X_t una variabile aleatoria con distribuzione $N(0,t)$, dove $t>0$, e sia Y una variabile aleatoria indipendente da X_t con distribuzione Poisson di parametro 1. Sia $Z_t = X_t + Y$.
   (a) Scrivere la funzione caratteristica della variabile Z_t, al variare di $t>0$.
   (b) Dire se Z_t converge in distribuzione per $t \downarrow 0$.
   (c) Calcolare $\mathbb{E}[e^{Z_t}]$, per ogni $t>0$.

Soluzione:
a) La funzione caratteristica vale

$$\varphi_{Z_t}(\theta) = \varphi_{X_t}(\theta)\varphi_Y(\theta) = e^{-\frac{t\theta^2}{2}} e^{(e^{i\theta}-1)}$$

b) Nel limite $t \downarrow 0$ si ha

$$\varphi_{Z_t}(\theta) \to e^{(e^{i\theta}-1)},$$

e dunque Z_t converge in distribuzione alla variabile di Poisson di parametro 1.

c) Calcoliamo

$$\mathbb{E}[e^{Z_t}] = \mathbb{E}[e^{X_t}]\mathbb{E}[e^Y] = e^{e-1+\frac{t}{2}}.$$

dove abbiamo usato:

$$\mathbb{E}[e^Y] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{k-1}}{k!} = e^{e-1}, \qquad \mathbb{E}[e^{X_t}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{x\sqrt{t}-\frac{x^2}{2}}\, dx = e^{\frac{t}{2}}.$$

Nome:______________________________________

5. Consideriamo lanci indipendenti di una moneta equa. Sia τ il primo tempo in cui si hanno 3 teste consecutive, e sia σ il primo tempo in cui si hanno 4 croci consecutive.

   (a) Dimostrare che $\mathbb{E}[\sigma] < \infty$ e $\mathbb{E}[\tau] < \infty$.

   (b) Calcolare $\mathbb{E}[\sigma]$ e $\mathbb{E}[\tau]$.

   (c) Calcolare $\mathbb{P}(\tau > \sigma)$.

Soluzione: (a). Per mostrare che σ, τ hanno media finita si puo' usare un argomento di dominiazione tramite variabili geometriche. In particolare $\mathbb{E}[\tau] \leqslant 3 \times 8 = 24$ e $\mathbb{E}[\tau] \leqslant 4 \times 16 = 64$.

(b). Avendo stabilito il punto a), tramite gli usuali argomenti di martingala si ottiene

$$\mathbb{E}[\tau] = 2^3 + 2^2 + 2 = 14, \quad \mathbb{E}[\sigma] = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 = 30.$$

(c). Sia $M^{(1)}$ la martingala associata a τ e $M^{(2)}$ quella associata σ come nel punto b) sopra. Allora la martingala $Q_n = M_n^{(1)} - M_n^{(2)}$, per il teorema di optional stopping, soddisfa $\mathbb{E}[Q_{\tau\wedge\sigma}] = 0$, dove $\tau \wedge \sigma$ indica il minimo dei due tempi τ e σ. Inoltre per costruzione si ha $Q_{\tau\wedge\sigma} = (2^3 + 2^2 + 2)1_{\tau<\sigma} - (2^4 + 2^3 + 2^2 + 2)1_{\tau<\sigma}$. Ne segue che

$$0 = \mathbb{E}[Q_{\tau\wedge\sigma}] = \mathbb{P}(\tau < \sigma)(2^3 + 2^2 + 2) - (1 - \mathbb{P}(\tau < \sigma))(2^4 + 2^3 + 2^2 + 2)$$

Risolvendo si ha

$$\mathbb{P}(\tau < \sigma) = \frac{2^4 + 2^3 + 2^2 + 2}{2^4 + 2^4 + 2^3 + 2^2} = \frac{30}{44} = \frac{15}{22}.$$

In conclusione $\mathbb{P}(\tau > \sigma) = 1 - \mathbb{P}(\tau < \sigma) = \frac{7}{22}$

Nome:____

6. Enunciare il teorema di convergenza per martingale limitate in L^1 e fornire cenni di dimostrazione.

Nome:____