Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2017-18, I semestre
6 febbraio, 2018

CP410: Esame 2, 6 febbraio 2018

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nome:____

1. Consideriamo infiniti lanci di una moneta equa. Per $n \in \mathbb{N}$ definiamo gli eventi:

$$A_n = \{\text{testa al lancio } n \text{ e croce al lancio } n+1\}.$$

Calcolare la probabilità dei seguenti eventi

(a) $\bigcap_{i=1}^{3} A_i$

(b) $\bigcap_{i=1}^{3} A_{2i}$

(c) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$

Soluzione:

(a). Si ha $A_i \cap A_{i+1} = \emptyset$ e quindi

$$\mathbb{P}(\cap_{i=1}^{3} A_i) = 0.$$

(b). Per l'indipendenza

$$\mathbb{P}(\cap_{i=0}^{3} A_{2i}) = \prod_{i=1}^{3} \mathbb{P}(A_{2i}) = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}.$$

(c). Gli eventi A_{2i} sono indipendenti e hanno probabilità positiva e dunque per il secondo lemma di Borel-Cantelli si ha

$$\mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{i \geqslant n} A_{2i}) = 1.$$

Ossia $\{A_{2i}, \text{ i.o.}\}$ quasi certamente. Ma $\{A_{2i}, \text{ i.o.}\} \subset \{A_i, \text{ i.o.}\}$, e dunque

$$\mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{i \geqslant n} A_i) = \mathbb{P}(A_i, \text{ i.o.}) = 1.$$

Nome:____

2. Siano $X_1, X_2, \dots$ variabili aleatorie i.i.d. tali che $X_i = -1, +1$ con probabilità $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ rispettivamente. Poniamo $S_0 = 0$ e $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Dato $k \in \mathbb{N}$, sia τ_k il primo tempo $n \in \mathbb{N}$ tale che $|S_n| = k$.

   (a) Calcolare il valore atteso di τ_k al variare di k.

   (b) Gli eventi $A = \{\tau_2 = 2\}$ e $B = \{S_{\tau_2} = 2\}$ sono indipendenti ?

Soluzione: a). Sia $p = 2/3$ e $q = 1 - p = 1/3$. Ricordiamo che $M_n = S_n - n(p - q)$ è una martingala con incrementi limitati. Inoltre con gli argomenti usuali si mostra che τ_k è tempo di arresto e che $\mathbb{E}[\tau_k] < \infty$. Allora per il teorema di optional stopping si ha

$$\mathbb{E}[\tau_k] = \frac{\mathbb{E}[S_{\tau_k}]}{p-q} = \frac{k\rho_k - k(1-\rho_k)}{p-q} = \frac{k(2\rho_k - 1)}{p-q},$$

dove ρ_k è la probabilità che $S_{\tau_k} = k$. Per calcolare ρ_k usiamo la martingala

$$Q_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}, \qquad Q_0 = 1.$$

Notiamo che $Q_{n \wedge \tau_k}$ è limitata e dunque per il teorema di optional stopping si ha

$$1 = \mathbb{E}[Q_{\tau_k}] = \rho_k \left(\frac{q}{p}\right)^k + (1-\rho_k)\left(\frac{q}{p}\right)^{-k}.$$

Ne segue che

$$\rho_k = \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^k - 1}{\left(\frac{p}{q}\right)^k - \left(\frac{q}{p}\right)^k} = \frac{1 - 2^{-k}}{1 - 4^{-k}}.$$

In conclusione

$$\mathbb{E}[\tau_k] = 3k\, \frac{1 - 2^{-k+1} + 4^{-k}}{1 - 4^{-k}}.$$

b). Consideriamo gli eventi $\tau_k = k$ e $S_{\tau_k} = k$. Osserviamo che $\tau_k = k$ implica che si hanno k passi a destra oppure k passi a sinistra. Chiamiamo U_k l'evento k passi a destra e V_k l'evento k passi a sinistra. Allora

$$\mathbb{P}(\tau_k = k, S_{\tau_k} = k) = \mathbb{P}(\tau_k = k, S_{\tau_k} = k, U_k) + \mathbb{P}(\tau_k = k, S_{\tau_k} = k, V_k).$$

Inoltre U_k implica $\tau_k = k$ e $S_{\tau_k} = k$, mentre V_k implica $\tau_k = k$ e $S_{\tau_k} = -k$. Allora

$$\mathbb{P}(\tau_k = k, S_{\tau_k} = k) = \mathbb{P}(U_k) = p^k.$$

Ora osserviamo che

$$\mathbb{P}(\tau_k = k) = \mathbb{P}(\tau_k = k, U_k) + \mathbb{P}(\tau_k = k, V_k) = \mathbb{P}(U_k) + \mathbb{P}(V_k) = p^k + q^k.$$

E dunque

$$\mathbb{P}(\tau_k = k, S_{\tau_k} = k) = p^k\,, \qquad \mathbb{P}(\tau_k = k)\mathbb{P}(S_{\tau_k} = k) = (p^k + q^k)\rho_k.$$

Nel caso $k = 2$ si ha $\mathbb{P}(\tau_2 = 2, S_{\tau_2} = 2) = p^2 = 4/9$ e $\mathbb{P}(\tau_2 = 2)\mathbb{P}(S_{\tau_2} = 2) = 4/9$. Dunque gli eventi sono indipendenti.

Nome:____

3. Siano $Y_1, Y_2, \dots$ variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione normale standard. Sia $N(t)$ una variabile di Poisson di parametro $t > 0$ indipendente dalle $\{Y_i\}$. Definiamo la variabile

$$X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } N(t) = 0 \\ \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i & \text{se } N(t) \neq 0 \end{cases}$$

   (a) Sia $\mathcal{G}_t = \sigma(N(t))$ la sigma algebra generata da $N(t)$. Calcolare i valori attesi condizionati $\mathbb{E}[X(t) \,|\, \mathcal{G}_t]$ e $\mathbb{E}[X(t)^2 \,|\, \mathcal{G}_t]$.

   (b) Calcolare la funzione caratteristica di $X(t)$ al variare di $t \in (0, \infty)$.

   (c) Dimostrare che la variabile $\frac{X(t)}{\sqrt{t}}$ converge in distribuzione per $t \to \infty$ e descriverne il limite.

Soluzione: a). Notiamo che $N(t)$ assume i valori $0, 1, \dots$. Se $G_j = \{N(t) = j\}$, $j = 0, 1, \dots$ allora

$$X(t) = \sum_{j=1}^{\infty} (Y_1 + \cdots + Y_j) \mathbf{1}_{G_j}$$

Dunque, usando l'indipendenza

$$\mathbb{E}[X(t)|\mathcal{G}_t] = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}[Y_1 + \cdots + Y_j] \mathbf{1}_{G_j} = 0,$$
$$\mathbb{E}[X(t)^2|\mathcal{G}_t] = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}[(Y_1 + \cdots + Y_j)^2] \mathbf{1}_{G_j} = \sum_{j=0}^{\infty} j \mathbf{1}_{G_j} = N(t).$$

b). Allo stesso modo calcoliamo

$$\varphi_{X(t)}(\theta) = \mathbb{E}[e^{i\theta X(t)}] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[e^{i\theta X(t)}|\mathcal{G}_t]\right] = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E}[e^{i\theta(Y_1 + \cdots + Y_j)}] \mathbb{E}[\mathbf{1}_{G_j}]$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\frac{j\theta^2}{2}} \mathbb{P}(G_j) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\frac{j\theta^2}{2}} \frac{t^j}{j!} e^{-t} = \exp\left(t(e^{-\theta^2/2} - 1)\right)$$

c) Per $X(t)/\sqrt{t}$ la funzione caratteristica è

$$\varphi_{X(t)/\sqrt{t}}(\theta) = \varphi_{X(t)}(\theta/\sqrt{t}) = \exp\left(t(e^{-\theta^2/(2t)} - 1)\right)$$

Per $t \to \infty$, $\theta \in \mathbb{R}$ fissato, abbiamo $e^{-\theta^2/(2t)} - 1 = -\theta^2/(2t) + o(1/t)$, e $t(e^{-\theta^2/(2t)} - 1) \to -\theta^2/2$. Dunque

$$\varphi_{X(t)/\sqrt{t}}(\theta) \to e^{-\theta^2/2},$$

ossia la $X(t)/\sqrt{t}$ converge in distribuzione per $t \to \infty$ alla normale standard $N(0, 1)$.

Nome:____________________________________

4. Enunciare e dimostrare la legge forte dei grandi numeri per somme di variabili indipendenti X_i, non necessariamente identicamente distribuite, tali che $\mathbb{E}[X_i] = 0$ e $\mathbb{E}[X_i^2] = 1$.

Nome:______________________________________

5. Sia X_n una successione di variabili aleatorie tale che $X_n \to 0$ in L^2 per $n \to \infty$. Dire quali delle seguenti affermazioni è vera o falsa (motivare la risposta).

   (a) X_n converge a zero in probabilità

   (b) $\mathbb{E}[\psi(X_n)] \to \psi(0)$, $n \to \infty$ per ogni $\psi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continua e limitata.

   (c) $X_n \to 0$ in L^4 per $n \to \infty$.

Soluzione:
(a). Per ogni $\varepsilon > 0$, la disuguaglianza di Markov implica

$$\mathbb{P}(|X_n| \geqslant \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n^2 \geqslant \varepsilon^2) \leqslant \varepsilon^{-2}\mathbb{E}[X_n^2] \to 0\,.$$

Dunque $X_n \to 0$ in probabilità.

(b). La convergenza in probabilità implica la convergenza in distribuzione (si può vedere per esempio usando le funzioni caratteristiche), ossia $\mathbb{E}[\psi(X_n)] \to \psi(0)$, $n \to \infty$ per ogni $\psi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continua e limitata. Allora anche b) è vera.

(c). E' falsa in generale. Per esempio possiamo prendere $X_n = \frac{1}{n}Y$ dove Y è una variabile aleatoria con $\mathbb{E}[Y^4] = +\infty$ e $\mathbb{E}[Y^2] = 1$. Allora per ogni n si ha $\mathbb{E}[X_n^2] = \frac{1}{n^2}$ ma $\mathbb{E}[X_n^4] = +\infty$.

Nome:______________________________________

6. Una sequenza di cifre viene generata in maniera aleatoria di modo che le cifre sono con buona approssimazione indipendenti e uniformemente distribuite in $\{0, 1, \ldots, 9\}$.

   (a) Calcolare il numero medio di cifre nella sequenza quando appare per la prima volta la stringa 919

   (b) Calcolare la probabilità che la stringa 911 sia osservata prima della stringa 919

Soluzione:
Siano τ_{919} e τ_{911} i tempi aleatori richiesti. La tecnica di martingala usuale (vedere appunti su esercizi con martingale) permette di stabilire che

$$\mathbb{E}[\tau_{919}] = 10^3 + 10 = 1010, \qquad \mathbb{P}(\tau_{919} > \tau_{911}) = \frac{1}{2}.$$

L'ultimo risultato è intuitivamente evidente, se pensiamo che per vedere una delle due stringhe bisogna prima vedere la coppia 91, dopo di che 9 e 1 hanno la stessa probabilità di apparire come cifra successiva.

Nome:____