Dipartimento di Matematica e Fisica, Roma Tre
Pietro Caputo

2019-20, I semestre
13 febbraio 2020

CP410: Esame 2, 13 febbraio 2020

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nome:____

1. Consideriamo una sequenza infinita di 0 e 1, e supponiamo che le cifre siano variabili di Bernoulli indipendenti con parametro $\frac{1}{2}$. Mostrare che:

   (a) La probabilità di avere infiniti 1 isolati è uguale a 1. (Un 1 è isolato se preceduto e seguito da uno 0).

   (b) Sia X_n il numero di 1 isolati nelle prime n cifre. Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \geqslant \tfrac{n}{25}) = 1.$$

Soluzione:
a). Dividiamo la sequenza delle prime n cifre in blocchi consecutivi da 3 cifre ciascuno, senza sovrapposizione. Dunque il primo blocco è costituito dalle cifre nelle posizioni $\{1, 2, 3\}$, il secondo dalle cifre nelle posizioni $\{4, 5, 6\}$ ecc. Se n non è multiplo di 3 ignoriamo le cifre che restano, in modo da ottenere sempre $m(n) = \lfloor n/3 \rfloor$ (parte intera) blocchi distinti. Sia Y_n il numero di blocchi su cui osserviamo la sequenza 010. Se X_n rappresenta il numero di 1 isolati fino alla cifra n-esima, si ha necessariamente $X_n \geqslant Y_n$. Inoltre, poiché la probabilità di avere un blocco pari a 010 vale 1/8, la legge forte dei grandi numeri mostra che $\frac{Y_n}{m(n)} \to \frac{1}{8}$ quasi certamente. Usando $\frac{m(n)}{n/3} \to 1$ si ha $\frac{Y_n}{n} \to \frac{1}{24}$ q.c., in particolare $Y_n \to \infty$ q.c. che implica $X_n \to \infty$ q.c. Allora la probabilità di avere infiniti 1 isolati è uguale a 1.

b). $X_n < n/25$ implica $\frac{1}{n}Y_n < 1/25$ e dunque esiste un $\varepsilon > 0$ indipendente da n tale che $|\frac{1}{n}Y_n - \frac{1}{24}| > \varepsilon$. Ma sappiamo che $\frac{Y_n}{n} \to \frac{1}{24}$ q.c. e dunque anche in probabilità. Allora

$$\mathbb{P}(X_n < \tfrac{n}{25}) \leqslant \mathbb{P}(|\tfrac{1}{n}Y_n - \tfrac{1}{24}| > \varepsilon) \to 0,$$

e dunque $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n < \frac{n}{25}) = 0$.

Nome:____

2. Enunciare e dimostrare la legge $0-1$ di Kolmogorov.

Nome:________________________________

3. Sia Y_n una variabile di Poisson di parametro n e sia

$$Z_n = e^{n(1-e)+Y_n}\,, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

   (a) Calcolare il valore atteso di Z_n per ogni $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Dire se Z_n converge, in che senso, e discuterne il limite.
   (c) Dire se Z_n converge in L^p per qualche $p \geqslant 1$.

Soluzione:
a). Si ha $\mathbb{E}[Z_n] = e^{n(1-e)}\mathbb{E}[e^{Y_n}]$. Inoltre

$$\mathbb{E}[e^{Y_n}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-n}\frac{n^k}{k!}e^k = e^{-n(1-e)}\,.$$

Allora $\mathbb{E}[Z_n] = 1$ per ogni n.

b). Possiamo scrivere $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$ dove X_i sono variabili di Poisson di parametro 1 indipendenti. Poiché $\mathbb{E}[e^{X_1}] = e^{e-1}$, notiamo che rispetto alla filtrazione $\mathcal{F}_k = \sigma(X_1, \ldots, X_k)$ la $\{Z_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ è una martingala. Inoltre $Z_n \geqslant 0$ e dunque Z_n è limitata in L^1. Allora per il teorema di convergenza si ha che Z_n converge quasi certamente. Dalla legge dei grandi numeri sappiamo che $\frac{1}{n}Y_n \to 1$ quasi certamente. Essendo $e - 1 > 1$ si ha

$$n(e-1) - Y_n \to +\infty$$

quasi certamente e dunque $Z_n \to 0$ q.c.

c). Se avessimo Z_n convergente in L^p per qualche $p \geqslant 1$ allora per b) avremmo $Z_n \to 0$ in L^p e per monotonia delle norme si avrebbe $Z_n \to 0$ in L^1. In questo caso si avrebbe anche $\mathbb{E}[Z_n] \to 0$ che contraddice $\mathbb{E}[Z_n] = 1$. Dunque Z_n non è convergente in nessuno spazio L^p con $p \geqslant 1$.

Nome:______________________________________

4. Sia S_n la posizione dopo n passi di una passeggiata aleatoria semplice asimmetrica su $\mathbb{Z}$, con probabilità di salto a destra $\frac{2}{3}$ e probabilità di salto a sinistra $\frac{1}{3}$. Supponendo $S_0 = 0$, determinare per ogni $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$:

   (a) il valore atteso del primo tempo n tale che $S_n = k$.

   (b) il valore atteso del secondo tempo n tale che $S_n = k$.

Soluzione: a). Notiamo che se $W_n = S_n - \frac{n}{3}$ è una martingala rispetto alla filtrazione naturale. Chiamiamo τ il primo tempo n tale che $S_n = k$. Con gli usuali argomenti (usando il fatto che la probabilità di salto a destra è maggiore di quella di salto a sinistra) si mostra che $\mathbb{E}[\tau] < \infty$. Inoltre la martingala W_n ha incrementi limitati. Allora per il teorema di optional stopping sappiamo che $\mathbb{E}[S_\tau] - \frac{1}{3}\mathbb{E}[\tau] = 0$. Usando $S_\tau = k$ troviamo $\mathbb{E}[\tau] = 3k$.

b). Il secondo tempo n tale che $S_n = k$ si può scrivere come $\tau + \tau'$ dove τ è il primo tempo n tale che $S_n = k$ e τ' è il primo tempo $n \geqslant 1$ tale che $S'_n = 0$ dove S'_n è una passeggiata aleatoria con le stesse probabilità di salto di S_n ma con punto di partenza $S'_0 = 0$. (Possiamo notare inoltre che τ e τ' sono indipendenti). Allora il valore atteso cercato vale $\mathbb{E}[\tau] + \mathbb{E}[\tau'] = 3k + \mathbb{E}[\tau']$. Mostriamo che τ' ha valore atteso infinito. Essendo $2/3$ la probabilità di andare a destra abbiamo

$$\mathbb{E}[\tau'] \geqslant 1 + \frac{2}{3}\mathbb{E}[\tau'']$$

dove τ'' è il primo tempo n tale che $S'_n = -1$, partendo da $S'_0 = 0$. Se fosse $\mathbb{E}[\tau''] < \infty$ potremmo usare l'optional stopping per $S'_n - n/3$ e ottenere

$$0 = S'_0 - 0/3 = \mathbb{E}[S_{\tau''}] - \mathbb{E}[\tau'']/3 \leqslant \mathbb{E}[S_{\tau''}] = -1,$$

che è una contraddizione. In conclusione $\mathbb{E}[\tau'] = \infty$.

Nome:______________________________________

5. Sia $a_k = 2^{-k}$ e, per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia X_n una variabile aleatoria con funzione caratteristica

$$\varphi_{X_n}(\theta) = e^{in\theta - \frac{1}{2}\theta^2 \sum_{k=1}^n a_k}, \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

   (a) Calcolare il valore atteso e la varianza di X_n per ogni $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Calcolare $\mathbb{P}(\frac{X_n}{n} \geqslant 1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. .

   (c) Mostrare che $n - X_n$ converge in distribuzione e descriverne il limite.

Soluzione: a). La funzione $\theta \mapsto e^{i\mu\theta - \frac{1}{2}\theta^2\sigma^2}$ è la funzione caratteristica di una normale $N(\mu, \sigma^2)$. Allora X_n è una normale $N(n, \sigma_n^2)$ dove $\sigma_n^2 = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n 2^{-k} = 1 - 2^{-n}$. In particolare, X_n ha media n e varianza σ_n^2.
b). Osserviamo che $X_n - n$ è una normale $N(0, \sigma_n^2)$ e dunque

$$\mathbb{P}(\tfrac{X_n}{n} \geqslant 1) = \mathbb{P}(X_n - n \geqslant 0) = \frac{1}{2}.$$

c). Notiamo che $n - X_n$ ha funzione caratteristica $\varphi_{n-X_n}(\theta) = e^{-\frac{1}{2}\theta^2\sigma_n^2}$. Allora $\varphi_{n-X_n}(\theta) \to e^{-\frac{1}{2}\theta^2}$, dove usiamo il fatto che $\sigma_n^2 \to 1$. In conclusione, $n - X_n$ converge in distribuzione alla normale standard $N(0, 1)$.

Nome:____________________________________

6. Siano $\{Z_i,\ i = 1, 2, \dots\}$ variabili aleatorie i.i.d. tali che $Z_i = 0, 1$ con probabilità $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ rispettivamente. Per $a, b, c \in \{0, 1\}$, sia τ_{abc} il primo tempo in cui appare la sequenza abc, ossia τ_{abc} è il primo indice $i \in \mathbb{N}$, $i \geqslant 3$, tale che $(Z_{i-2}, Z_{i-1}, Z_i) = (a, b, c)$.

   (a) Calcolare $\mathbb{E}[\tau_{010}]$.

   (b) Trovare una sequenza abc tale che $\mathbb{P}(\tau_{abc} > \tau_{010}) \leqslant \frac{1}{3}$.

   (c) Trovare una sequenza $a'b'c'$ tale che $\mathbb{P}(\tau_{a'b'c'} > \tau_{abc}) \leqslant \frac{1}{3}$, dove abc è la sequenza trovata nel punto precedente.

Soluzione: a) Con gli argomenti usuali si ottiene:

$$\mathbb{E}[\tau_{010}] = 2^3 + 2 = 10\,.$$

b). Data una sequenza $a_0b_0c_0$ per scegliere abc tale che $\mathbb{P}(\tau_{abc} > \tau_{a_0b_0c_0}) \leqslant \frac{1}{3}$ seguiamo la regola di scegliere come ultime due lettere le due prime della sequenza data, ossia $b = a_0$ e $c = b_0$ e completare con una prima lettera tale che la sequenza risultante non sia palindroma. Dunque, se $a_0b_0c_0 = 010$ abbiamo $abc = 001$ e con gli argomenti usuali otteniamo $\mathbb{P}(\tau_{001} > \tau_{010}) = \frac{1}{3}$.

c). Se $abc = 001$ poniamo $a'b'c' = 100$ e con gli argomenti usuali otteniamo $\mathbb{P}(\tau_{100} > \tau_{001}) = \frac{1}{4}$.

Nome:____