Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2014-15, I semestre
22 giugno, 2015

CP410: Esame 3, 22 giugno 2015

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nome:_______________________________________

1. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ lo spazio di probabilità definito da $\Omega = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$, $\mathcal{F}$ la sigma algebra dei Boreliani e $\mathbb{P}$ la misura di Lebesgue su Ω. Per ogni $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega$, definiamo

$$X(\omega) = \omega_1$$
$$Y(\omega) = \omega_2\,,$$
$$Z(\omega) = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3.$$

   (a) Dire se X, Y, Z sono variabili indipendenti.

   (b) Calcolare il valore atteso $\mathbb{E}[\,(X^2 + Y^2)Z\,]$

   (c) Descrivere la variabile aleatoria $\mathbb{E}[\,Z\,|X\,]$

Soluzione: (a). Le variabili non sono indipendenti: per esempio gli eventi $A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \geqslant 1/2\}$, $B = \{\omega \in \Omega : \ Y(\omega) \geqslant 1/2\}$, $C = \{\omega \in \Omega : \ Z(\omega) \leqslant 1/2\}$ soddisfano $A \cap B \cap C = \varnothing$ e dunque:

$$0 = \mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$

Inoltre $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1/2$, e

$$\mathbb{P}(C) = \int_{x_1+x_2+x_3 \,\leqslant\, 1/2} dx_1 dx_2 dx_3 > 0.$$

Dunque

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).$$

(b). Il valore atteso $\mathbb{E}[\,(X^2 + Y^2)Z\,]$ vale

$$\mathbb{E}[\,(X^2 + Y^2)Z\,] = \mathbb{E}[X^2 Z] + \mathbb{E}[Y^2 Z] = 2\mathbb{E}[X^2 Z].$$

Sia $W = Z - X$. Allora X e W sono indipendenti e $\mathbb{E}[W] = 1$. Usando $\mathbb{E}[X^2] = 1/3$ e $\mathbb{E}[X^3] = 1/4$ abbiamo

$$\mathbb{E}[X^2 Z] = \mathbb{E}[X^3] + \mathbb{E}[X^2 W] = 1/4 + \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[W] = 1/4 + 1/3 = \frac{7}{12}.$$

Ne segue che $\mathbb{E}[\,(X^2 + Y^2)Z\,] = 7/6$.

(c). Se $W = Z - X$, allora X e W sono indipendenti, $\mathbb{E}[W|X] = \mathbb{E}[W] = 1$, e

$$\mathbb{E}[\,Z\,|X\,] = \mathbb{E}[X + W|X\,] = \mathbb{E}[X|X] + \mathbb{E}[W|X\,] = X + 1.$$

Nome:______________________________________

2. Enunciare e dimostrare il teorema del limite centrale.

Nome:____

3. Sia X_n una successione di variabili aleatorie indipendenti tale che X_n converge quasi certamente alla variabile X uniforme in $[0,1]$. Per ciascuna delle seguenti affermazioni dire se è vera o falsa, motivando la risposta.

   (a) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n| \geqslant 2) = 0$.

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| \geqslant \frac{3}{2}) = +\infty$.

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n \leqslant \, -0.1) < +\infty$.

Soluzione: (a). Se $X_n \to X$ quasi certamente, allora $X_n \to X$ in probabilità: per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \to 0$, $n \to \infty$. Essendo $X \in [0,1]$, l'evento $|X_n| \geqslant 2$ implica $|X_n - X| \geqslant 1$ e quindi $\mathbb{P}(|X_n| \geqslant 2) \to 0$, $n \to \infty$. Dunque (a) è vera.

(b). Supponiamo per assurdo che (b) sia vera. Allora per il lemma di Borel-Cantelli 2 si avrebbe $|X_n| \geqslant 3/2$ infinite volte, quasi certamente. Ma questo contraddice $X_n(\omega) - X(\omega) \to 0$ per quasi ogni ω, se $X(\omega) \in [0,1]$. Dunque (b) è falsa.

(c). Supponiamo per assurdo che (b) sia falsa. Allora per il lemma di Borel-Cantelli 2 si avrebbe $X_n \leqslant \, -0.1$ infinite volte, quasi certamente. Come sopra, questo contraddice l'ipotesi di convergenza quasi certa $X_n \to X$. Dunque (c) è vera.

Nome:____

4. Siano X_k, $k = 1, 2, \dots$ variabili di Bernoulli di parametro $1/2$ indipendenti e poniamo $Y_n = \sum_{k=1}^{n}(X_k - 1/2)$. Per $\ell \in \mathbb{N}$ fissato, sia

$$\tau_\ell = \inf\{n \geqslant 1 :\ |Y_n| = \ell/2\}.$$

   (a) Calcolare $\mathbb{E}[\tau_\ell]$ in funzione di ℓ.

   (b) Sapendo che $Y_1 = 1/2$, calcolare il valore atteso di τ_2.

Soluzione: (a). Se scriviamo $S_n = 2Y_n$ otteniamo la posizione al tempo n di una passeggiata semplice e simmetrica con condizione iniziale $S_0 = 0$. Allora gli argomenti usuali di martingala permettono di calcolare $\mathbb{E}[\tau_\ell] = \ell^2$.

(b). Abbiamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\tau_2 \,|\, Y_1 = 1/2] &= \mathbb{E}[\tau_2 \,|\, S_1 = 1] \\ &= 1 + \mathbb{E}[\tau_2 - \tau_1 | S_1 = 1].\end{aligned}$$

Osserviamo che, partendo da $S_1 = 1$, possiamo avere $S_2 = 0$ oppure $S_2 = 2$. Se condizioniamo a $S_2 = 2$ allora $\tau_2 - \tau_1 = 1$, mentre se condizioniamo a $S_2 = 0$, allora $\tau_2 - \tau_1$ è una variabile aleatoria con la stessa distribuzione di $1 + \tau_2$, con il tempo τ_2 relativo alla passeggiata aleatoria incondizionata che parte da $S_0 = 0$. Dunque

$$\mathbb{E}[\tau_2 - \tau_1 | S_1 = 1] = \mathbb{P}(S_2 = 2 | S_1 = 1) + (1 + \mathbb{E}[\tau_2])\mathbb{P}(S_2 = 0 | S_1 = 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 + \mathbb{E}[\tau_2]).$$

Usando $\mathbb{E}[\tau_2] = 4$ abbiamo $\mathbb{E}[\tau_2 \,|\, Y_1 = 1/2] = 4$.

Notiamo che lo stesso risultato si poteva ottenere osservando che per simmetria

$$\mathbb{E}[\tau_2 \,|\, Y_1 = 1/2] = \mathbb{E}[\tau_2 \,|\, Y_1 = -1/2],$$

e dunque

$$4 = \mathbb{E}[\tau_2] = \mathbb{P}(Y_1 = 1/2)\mathbb{E}[\tau_2 \,|\, Y_1 = 1/2] + \mathbb{P}(Y_1 = -1/2)\mathbb{E}[\tau_2 \,|\, Y_1 = -1/2] = \mathbb{E}[\tau_2 \,|\, Y_1 = 1/2].$$

Nome:______________________________________

5. Siano Z_j, $j \in \mathbb{N}$, variabili aleatorie indipendenti tali che $Z_j = 1 + j^{-1}$ con probabilità $1 - j^{-1}$, $Z_j = 1$ con probabilità j^{-2}, e $Z_j = 0$ con probabilità $j^{-1} - j^{-2}$. Sia

$$M_n = \prod_{j=1}^{n} Z_j.$$

   (a) M_n converge quasi certamente ?
   (b) M_n converge in L^1 ?
   (c) M_n converge in L^2 ?

Soluzione: (a). Notiamo che $Z_j \geqslant 0$ e

$$\mathbb{E}[Z_j] = (1 + j^{-1})(1 - j^{-1}) + j^{-2} = 1.$$

Allora M_n è martingala limitata in L^1. Pertanto converge quasi certamente. Inoltre

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(Z_j = 0) = \sum_{j=1}^{\infty} (j^{-1} - j^{-2}) = +\infty.$$

Allora per il lemma di Borel-Cantelli 2 si ha $Z_j = 0$ infinite volte quasi certamente. In particolare, $M_n \to 0$ quasi certamente.

(b). Se $M_n \to 0$ q.c. allora M_n non converge in L^1, altrimenti non potrebbe valere $\mathbb{E}[M_n] = 1$.

(c). Se M_n non converge in L^1 allora non può convergere in L^2.

Nome:______________________________________

6. Siano X, Y variabili aleatorie indipendenti con funzioni caratteristiche:

$$\varphi_X(\theta) = e^{-\frac{\theta^2}{2}}, \quad \varphi_Y(\theta) = e^{-\frac{3\theta^2}{2}}, \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

   (a) Calcolare la funzione caratteristica di $X + 2Y$.
   (b) Calcolare $\mathbb{E}[(X - Y)^2]$

Soluzione: Sappiamo che la normale $N(\mu, \sigma^2)$ ha funzione caratteristica $\varphi(\theta) = e^{-\frac{1}{2}\theta^2\sigma^2 + i\theta\mu}$.
Allora X è $N(0, 1)$, mentre Y è $N(0, 3)$.
(a). Per l'indipendenza si ha $X + 2Y = N(0, 13)$, e dunque

$$\varphi_{x+2Y}(\theta) = e^{-\frac{13}{2}\theta^2}.$$

(b). Inoltre

$$\mathbb{E}[(X - Y)^2] = \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[XY] + \mathbb{E}[Y^2] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] = 4.$$

Nome:______________________________________