Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2016-17, I semestre
28 giugno, 2017

CP410: Esame 3, 28 giugno 2017

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nome:____

1. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ lo spazio di probabilità definito da $\Omega = [0, \infty) \times [0, \infty)$, $\mathcal{F}$ la sigma algebra dei Boreliani e $\mathbb{P}$ la misura di probabilità su Ω tale che per ogni $t, s \geqslant 0$

$$\mathbb{P}([0,t) \times [0,s)) = \left(1 - e^{-t}\right)\left(1 - e^{-2s}\right)$$

Per ogni $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega$, definiamo

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \omega_1 \\ Y(\omega) &= \omega_2 \,. \end{aligned}$$

(a) Dire se X, Y sono variabili indipendenti.

(b) Per quali $p \geqslant 1$ il prodotto XY è in $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$?

(c) Per quali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha $e^{\alpha X + \beta Y} \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$?

Soluzione: (a). Le variabili sono indipendenti, infatti

$$\mathbb{P}(X \leqslant t, Y \leqslant s) = \mathbb{P}([0,t) \times [0,s)) = \left(1 - e^{-t}\right)\left(1 - e^{-2s}\right) = \mathbb{P}(X \leqslant t)\mathbb{P}(Y \leqslant s),$$

per ogni $t, s \geqslant 0$. Inoltre osserviamo che X è esponenziale di parametro 1 e Y è esponenziale di parametro 2.
(b). Per l'indipendenza abbiamo $\mathbb{E}[|XY|^p] = \mathbb{E}[X^p]\mathbb{E}[Y^p] < \infty$ per ogni $p \geqslant 1$, essendo $X \in L^p, Y \in L^p$ per ogni $p \geqslant 1$. Dunque XY è in L^p per ogni $p \geqslant 1$.
(c). Per l'indipendenza si ha

$$\mathbb{E}[e^{\alpha X + \beta Y}] = \mathbb{E}[e^{\alpha X}]\mathbb{E}[e^{\beta Y}].$$

Allora $e^{\alpha X + \beta Y} \in L^1$ se e solo se $e^{\alpha X} \in L^1$ e $e^{\beta Y} \in L^1$. Che equivale a $\alpha < 1$ e $\beta < 2$.

Nome:______________________________________

2. Enunciare e dimostrare i due lemmi di Borel-Cantelli.

Nome:____

3. Siano X_k, $k \in \mathbb{N}$, variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione uniforme nell'intervallo $[-1,1]$. Si consideri

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Per ciascuna delle seguenti affermazioni dire se è vera o falsa, motivando la risposta.

(a) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|Y_n| \geqslant 0.1) = 0$.

(b) $\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(Y_n \leqslant \sqrt{\frac{m}{n}}\right) = 1$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y_n \geqslant 0.5) = +\infty$.

Soluzione: (a). Le X_i hanno media nulla e momento primo finito. Per la legge dei grandi numeri forte si ha $Y_n \to 0$ q.c. e dunque in probabilità. Allora a) è vera.

(b). Per il teorema del limite centrale $\sqrt{n}Y_n$ converge in distribuzione a una normale Z di media zero e varianza $\sigma^2 > 0$, dove σ^2 è la varianza di X_1. Allora

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(Y_n \leqslant \sqrt{\frac{m}{n}}\right) = \mathbb{P}(Z \leqslant \sqrt{m}\,)$$

Passando al limite per $m \to \infty$ si ha

$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{P}(Z \leqslant \sqrt{m}\,) = \mathbb{P}(Z < \infty) = 1.$$

Dunque (b) è vera.

(c). Poiché le X_i sono limitate, si può usare per esempio il momento quarto per ottenere

$$\mathbb{E}[Y_n^4] \leqslant C\, n^{-2},$$

per qualche costante $C > 0$. Allora, se $t > 0$, per la disuguaglianza di Markov

$$\mathbb{P}(Y_n > t) \leqslant \mathbb{P}(Y_n^4 > t^4) \leqslant t^{-4} C\, n^{-2},$$

che è sommabile. Dunque (c) è falsa.

Nome:____

4. Siano Z_k, $k = 1, 2, \ldots$ variabili indipendenti tali che $Z_k = -1, 0, 1$ con probabilità $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$, e sia $S_n = \sum_{k=1}^n Z_k$. Sia τ il tempo di primo ritorno nell'origine:

$$\tau = \inf\{n \geqslant 1 : \ S_n = 0\},$$

   (a) Calcolare $\mathbb{P}(\tau = k)$, per $k = 1, 2, 3$.

   (b) Dimostrare che $\mathbb{E}[\tau] = +\infty$.

Soluzione: (a). Notiamo che $\tau = 1$ equivale a $S_1 = Z_1 = 0$, e dunque

$$\mathbb{P}(\tau = 1) = \frac{1}{3}.$$

Inoltre $\tau = 2$ equivale a $S_1 = 1, S_2 = 0$ oppure $S_1 = -1, S_2 = 0$. Allora

$$\mathbb{P}(\tau = 2) = 2 \times (\tfrac{1}{3})^2 = \frac{2}{9}.$$

Infine $\tau = 3$ si può realizzare nei seguenti due modi: $S_1 = 1, S_2 = 1, S_3 = 0$ oppure $S_1 = -1, S_2 = -1, S_3 = 0$. Allora

$$\mathbb{P}(\tau = 3) = 2 \times (\tfrac{1}{3})^3 = \frac{2}{27}.$$

(b). Condizioniamo al valore di S_1:

$$\mathbb{E}[\tau] = \mathbb{P}(S_1 = 0)\mathbb{E}[\tau | S_1 = 0] + \mathbb{P}(S_1 = -1)\mathbb{E}[\tau | S_1 = -1] + \mathbb{P}(S_1 = 1)\mathbb{E}[\tau | S_1 = 1].$$

Se $S_1 = 0$ allora $\tau = 1$ e dunque $\mathbb{E}[\tau | S_1 = 0] = 1$. Inoltre se definiamo

$$\tau_1 = \inf\{n \geqslant 1 : \ S_n = 1\},$$

allora per simmetria abbiamo $\mathbb{E}[\tau | S_1 = 1] = \mathbb{E}[\tau | S_1 = -1] = \mathbb{E}[\tau_1]$. Ne segue che

$$\mathbb{E}[\tau] = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\mathbb{E}[\tau_1].$$

Gli argomenti usuali basati sul teorema di optional stopping dimostrano che $\mathbb{E}[\tau_1] = +\infty$. In conclusione, $\mathbb{E}[\tau] = +\infty$.

Nome:____

5. Una stampante difettosa stampa ogni foglio indipendentemente in maniera corretta con probabilità $\frac{1}{2}$ e in maniera errata con probabilità $\frac{1}{2}$. Sia τ il numero di fogli necessari per ottenere 10 fogli stampati correttamente, e sia σ il numero di fogli necessari per ottenere 10 fogli consecutivi stampati correttamente.

   (a) Calcolare il valore atteso $\mathbb{E}[\tau]$

   (b) Calcolare la varianza $\mathrm{Var}[\tau]$

   (c) Calcolare $\mathbb{E}[\sigma]$

Soluzione: (a). possiamo interpretare le pagine corrette come un successo e vedere la sequenza come uno schema di Bernoulli di parametro $1/2$. Il tempo τ allora è il primo tempo per vedere 10 successi. Dunque τ è la somma di 10 variabili geometriche di parametro $1/2$ (anche nota come variabile binomiale negativa). Allora

$$\mathbb{E}[\tau] = 10 \times \mathbb{E}[\mathrm{Geo}(\tfrac{1}{2})] = 20,$$

dove usiamo il fatto che una geometrica di parametro p ha valore atteso $1/p$.

(b). Essendo le 10 variabili geometriche indipendenti abbiamo

$$\mathrm{Var}[\tau] = 10 \times \mathrm{Var}(\mathrm{Geo}(\tfrac{1}{2})) = 20,$$

dove usiamo il fatto che una geometrica di parametro p ha varianza $(1-p)/p^2$.

(c). La variabile σ è il primo tempo per vedere 10 successi consecutivi. Allora il teorema di optional stopping per martingale con l'argomento usuale mostra che

$$\mathbb{E}[\sigma] = \sum_{k=1}^{10} 2^k = 2^{11} - 2 = 2046.$$

Nome:______________________________________

6. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia X_n la variabile aleatoria con densità di probabilità

$$f_n(x) = \frac{n}{\pi(1+(nx)^2)}\,, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(a) X_n converge in probabilità ?

(b) X_n converge in distribuzione ?

(c) Calcolare la funzione caratteristica di X_n per ogni n.

Soluzione: (a). Notiamo che

$$\mathbb{P}(X_n \leqslant t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{n}{\pi(1+(nx)^2)}\,dx = \int_{-\infty}^{nt} \frac{1}{\pi(1+y^2)}\,dy = \mathbb{P}(X_1 \leqslant nt).$$

Allora X_1 è una variabile di Cauchy e X_n ha la stessa distribuzione di $\frac{1}{n}X_1$. Dunque

$$\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = \mathbb{P}(|X_1| > n\varepsilon) \to 0\,, \qquad n \to \infty,$$

per ogni $\varepsilon > 0$ fissato. Allora $X_n \to 0$ in probabilità.
(b). Per il punto a) si ha anche che X_n converge in distribuzione alla variabile identicamente nulla.
(c). La funzione caratteristica della variabile di Cauchy vale $\varphi_{X_1}(\theta) = e^{-|\theta|}$. Allora per ogni n si ha

$$\varphi_{X_n}(\theta) = \varphi_{X_1}(\theta/n) = e^{-\frac{1}{n}|\theta|}.$$

Nome:____