Dipartimento di Matematica e Fisica, Roma Tre
Pietro Caputo

2017-18, I semestre
7 giugno 2018

CP410: Esame 3, 7 giugno 2018

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nome:____

1. Consideriamo infiniti lanci di un dado a sei facce. Definiamo gli eventi

$$A_n^i = \{\text{faccia } i \text{ al lancio } n\},$$

e sia $\mathcal{F}$ la σ-algebra generata da tutti gli A_n^i, per $n \in \mathbb{N}$ e $i \in \{1, \ldots, 6\}$. Dimostrare che i seguenti eventi sono in $\mathcal{F}$:

(a) infinite volte 1

(b) infinite volte 1, infinite volte 2 e un numero finito di volte 6

(c) infinite volte la sequenza 123456

Soluzione: Si tratta di mostrare che gli eventi elencati si possono scrivere usando opportune unioni, intersezioni e complementari degli A_n^i. Sia $E^i = \{\text{infinite volte } i\}$. Allora:

(a) $E^1 = \cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n \geqslant k} A_n^1$

(b) $E^1 \cap E^2 \cap (E^6)^c = E^1 \cap E^2 \cap \left(\cup_{k=1}^{\infty} \cap_{n \geqslant k} (A_n^6)^c\right)$

(c) Sia $F_k = A_{k+1}^1 \cap A_{k+2}^2 \cap \cdots \cap A_{k+6}^6$. Allora l'evento richiesto è

$$\cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n \geqslant k} F_n.$$

Nome:____

2. Enunciare e dimostrare il teorema del limite centrale per somme di variabili indipendenti e identicamente distribuite.

Nome:______________________________________

3. Consideriamo il processo di ramificazione (branching) tale che a ogni generazione ciascun individuo indipendentemente dà vita a k individui con probabilità

$$p(k) = 2^{-1-k}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Siano $Z_0 = 1$ e Z_n il numero di individui alla generazione n.

(a) Calcolare il valor medio di Z_n per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(b) Trovare $\mu > 0$ tale che $M_n = \mu^{-n} Z_n$ è una martingala

(c) Dire se M_n converge e in che senso.

Soluzione:
Sia X la variabile aleatoria definita da

$$\mathbb{P}(X = k) = p(k) = 2^{-1-k}.$$

X è una geometrica di parametro $1/2$. Allora il valor medio di Z_n, condizionato al valore di Z_{n-1} è dato da

$$\mathbb{E}[Z_n | Z_{n-1}] = Z_{n-1}\mathbb{E}[X] = 2Z_{n-1}.$$

Dunque $\mathbb{E}[Z_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z_n|Z_{n-1}]] = 2\mathbb{E}[Z_{n-1}]$. Iterando si ha $\mathbb{E}[Z_n] = 2^n$. Ponendo $\mu = 2$ si vede che $M_n = 2^{-n}Z_n$ è una martingala. Inoltre M_n è limitata in L^1, infatti $\mathbb{E}[|M_n|] = \mathbb{E}[M_n] = 1$ per ogni n. Allora per il teorema di Doob sappiamo che M_n converge quasi certamente a una variabile aleatoria $M_\infty \geqslant 0$ tale che $\mathbb{E}[M_\infty] \leqslant 1$.

Nome:____________________________________

4. Siano $X_1, X_2, \dots$ variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione Bernoulli di parametro $\frac{1}{3}$. Sia Y_n una variabile binomiale di parametri n e $\frac{1}{2}$, indipendente dalle $\{X_i\}$. Definiamo la variabile

$$Z_n = \begin{cases} \sum_{i=1}^{Y_n} X_i & \text{se } Y_n \neq 0 \\ 0 & \text{se } Y_n = 0 \end{cases}$$

(a) Calcolare la media e la varianza di Z_n al variare di $n \in \mathbb{N}$.

(b) Calcolare la funzione caratteristica di Z_n al variare di $n \in \mathbb{N}$.

(c) Trovare una successione $a_n \to \infty$ tale che $\frac{Z_n - a_n}{\sqrt{n}}$ converge in distribuzione e descriverne il limite.

Soluzione: a). Notiamo che, condizionatamente all'evento $Y_n = j$, si ha che Z_n è una binomiale di parametri j e $\frac{1}{3}$. Se $A_j = \{Y_n = j\}$, $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, allora

$$Z_n = \sum_{j=1}^{n} (X_1 + \cdots + X_j) \mathbf{1}_{A_j}.$$

Dunque, ponendo $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_n)$, si ha $A_j \in \mathcal{F}_n$ per ogni j e

$$\mathbb{E}[Z_n | \mathcal{F}_n] = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}[X_1 + \cdots + X_j] \mathbf{1}_{A_j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{3} j \, \mathbf{1}_{A_j} = \frac{1}{3} Y_n.$$

Ne segue che

$$\mathbb{E}[Z_n] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[Z_n | \mathcal{F}_n]\right] = \frac{1}{3} \frac{n}{2} = \frac{n}{6}.$$

Inoltre,

$$\mathbb{E}[Z_n^2 | \mathcal{F}_n] = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}[(X_1 + \cdots + X_j)^2] \mathbf{1}_{A_j} = \sum_{j=0}^{n} \left(\left(\frac{1}{3} j \right)^2 + \frac{2}{9} j \right) \mathbf{1}_{A_j} = \left(\frac{1}{3} \right)^2 Y_n^2 + \frac{2}{9} Y_n.$$

Allora

$$\mathbb{E}[Z_n^2] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[Z_n^2 | \mathcal{F}_n]\right] = \frac{1}{9} \frac{n^2}{4} + \frac{1}{9} \frac{n}{4} + \frac{2}{9} \frac{n}{2} = \frac{n^2}{36} + \frac{5n}{36}.$$

In conclusione, la varianza di Z_n vale

$$\mathrm{Var}(Z_n) = \mathbb{E}[Z_n^2] - \mathbb{E}[Z_n]^2 = \frac{5n}{36}$$

b). Allo stesso modo calcoliamo

$$\varphi_{Z_n}(\theta) = \mathbb{E}[e^{i\theta Z_n}] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[e^{i\theta Z_n} | \mathcal{F}_n]\right] = \sum_{j=0}^{n} \mathbb{E}[e^{i\theta(X_1 + \cdots + X_j)}] \mathbb{P}(A_j)$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{2}{3} + \frac{e^{i\theta}}{3} \right)^j 2^{-n} \binom{n}{j} = 2^{-n} \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{e^{i\theta}}{3} \right)^n = \left(\frac{5}{6} + \frac{e^{i\theta}}{6} \right)^n.$$

c) Dal punto b) riconosciamo che Z_n è una binomiale di parametri n e $p = \frac{1}{6}$. Allora basta prendere $a_n = \frac{n}{6}$ per avere la convergenza in distribuzione:

$$\frac{Z_n - a_n}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma(Z_n - a_n)}{\sqrt{n\sigma^2}} \to N(0, \sigma^2),$$

dove $\sigma^2 = p(1-p) = \frac{5}{36}$.

Nome:____

5. Sia S_n la passeggiata aleatoria simmetrica con passi di ± 1 con probabilità $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$, con punto iniziale $S_0 = 0$. Sia τ_n il tempo in cui sono stati visitati per la prima volta n vertici distinti (incluso il vertice di partenza, dunque $\tau_1 = 0$).

   (a) Calcolare $\mathbb{E}[\tau_2]$ e $\mathbb{E}[\tau_3]$.

   (b) Dimostrare per induzione la formula $\mathbb{E}[\tau_n] = \frac{n(n-1)}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.

Soluzione: a). Per visitare due siti distinti basta fare un primo passo, dunque $\tau_2 = 2$ e $\mathbb{E}[\tau_2] = 2$. Per visitare 3 siti distinti, dopo aver fatto il primo passo, supponiamo che sia a destra, si deve aspettare il tempo necessario, chiamiamolo τ_2', per uscire dall'intervallo $\{0, 1\}$, partendo dal vertice 1. Il valor medio di questo tempo si puo' calcolare con le usuali considerazioni di martingala, e si ottiene $\mathbb{E}[\tau_2'] = 2$. Allo stesso modo si procede se il primo passo era stato a sinistra. Allora si ha $\mathbb{E}[\tau_3] = \mathbb{E}[\tau_2] + \mathbb{E}[\tau_2'] = 3$.

b). Ragionando in maniera identica al passo precedente si ha

$$\mathbb{E}[\tau_{n+1}] = \mathbb{E}[\tau_n] + \mathbb{E}[\tau_n'],$$

dove τ_n' è il tempo necessario per la passeggiata aleatoria simmetrica che parte in 0 per uscire dall'intervallo $\{0, \ldots, n-1\}$. Infatti, supponiamo che $k = S_{\tau_n}$ sia il vertice su cui ci troviamo quando per la prima volta abbiamo visitato n vertici distinti. Necessariamente allora sono stati visitati tutti gli n vertici dell'intervallo $I_{k,n} = \{-(n-k-1), \ldots, k\}$ se $k \geqslant 0$, oppure $I_{k,n} = \{k, \ldots, (n+k-1)\}$ se $k < 0$. Dunque per visitare un nuovo vertice (l'n+1-esimo) si deve attendere il tempo per uscire dall'intervallo $I_{k,n}$, partendo da k. Questo tempo equivale al tempo τ_n' per uscire da $\{0, \ldots, n-1\}$ partendo da 0. Per le usuali considerazioni di martingala τ_n' ha valor medio n. Dunque

$$\mathbb{E}[\tau_{n+1}] = \mathbb{E}[\tau_n] + n.$$

Iterando si ottiene

$$\mathbb{E}[\tau_n] = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Nome:______________________________________

6. Sia Y_n la posizione dopo n passi della passeggiata aleatoria asimmetrica con passi $+1, -1$ con probabilità $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{4}$ rispettivamente, con punto iniziale $Y_0 = 0$. Dato $k \in \mathbb{N}$, sia τ_k il primo tempo $n \in \mathbb{N}$ tale che $Y_n = k$.
   (a) Calcolare il valore atteso e la varianza di τ_k in funzione di k;
   (b) Dimostrare che $\frac{1}{\sqrt{k}}(\tau_k - \mathbb{E}[\tau_k])$ converge in distribuzione per $k \to \infty$ e descriverne il limite.

Soluzione:
Notiamo che $M_n = Y_n - (\frac{3}{4} - \frac{1}{4})n = Y_n - n/2$ è una martingala e che, trattandosi di una passeggiata aleatoria asimmetrica, gli argomenti usuali implicano che $\mathbb{E}[\tau_k] < \infty$ e $\mathbb{E}[\tau_k^2] < \infty$. Allora per optional stopping si ha $0 = \mathbb{E}[M_{\tau_k}] = k - \mathbb{E}[\tau_k]/2$ e dunque $\mathbb{E}[\tau_k] = 2k$.
Per il calcolo del momento secondo di τ_k osserviamo che $Q_n = M_n^2 - \sigma^2 n$ è una martingala se $\sigma^2 = \mathbb{E}[(M_n - M_{n-1})^2] = \frac{3}{4}$. Infatti

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Q_n - Q_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}[(M_n - M_{n-1})(M_n + M_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}] - \sigma^2 \\ &= \mathbb{E}[(M_n - M_{n-1})M_n|\mathcal{F}_{n-1}] - \sigma^2 = \mathbb{E}[(M_n - M_{n-1})^2|\mathcal{F}_{n-1}] - \sigma^2 = 0\end{aligned}$$

Ma $Q_n = Y_n^2 - nY_n + n^2/4 - \sigma^2 n$. Notiamo anche che $n \leqslant \tau_k$ implica

$$\begin{aligned}|Q_n - Q_{n-1}| &\leqslant |M_n - M_{n-1}||M_n + M_{n-1}| + \sigma^2 \\ &\leqslant 2(k + \tau_k/2)|M_n - M_{n-1}| + \sigma^2 \\ &\leqslant 3k + 3\tau_k/2 + \sigma^2,\end{aligned}$$

dove usiamo $|M_n + M_{n-1}| \leqslant 2(k + \tau_k/2)$ per $n \leqslant \tau_k$ e $|M_n - M_{n-1}| \leqslant 3/2$ per ogni n. Essendo $\mathbb{E}[\tau_k^2] < \infty$ si può applicare l'optional stopping. In conclusione

$$0 = \mathbb{E}[Q_{\tau_k}] = k^2 - k\mathbb{E}[\tau_k] + \mathbb{E}[\tau_k^2]/4 - \sigma^2\mathbb{E}[\tau_k] = k^2 - 2k^2 + \mathbb{E}[\tau_k^2]/4 - 2\sigma^2 k.$$

Ne segue che $\mathbb{E}[\tau_k^2] = 4k^2 + 8k\sigma^2$. La varianza allora vale $\mathrm{Var}(\tau_k) = \mathbb{E}[\tau_k^2] - \mathbb{E}[\tau_k]^2 = 8k\sigma^2 = 6k$.

Notiamo che τ_k è la somma di k variabili indipendenti e identicamente distribuite $\tau'_1, \ldots, \tau'_k$, dove τ'_j rappresenta il tempo necessario a visitare j per la prima volta, partendo da $j - 1$. In particolare $\tau'_1 = \tau_1$, $\mathbb{E}[\tau_k] = k\mathbb{E}[\tau_1] = 2k$, e $\mathrm{Var}[\tau_k] = k\mathrm{Var}[\tau_1] = 6k$. Allora, per il teorema del limite centrale si ha la convergenza in distribuzione

$$\frac{1}{\sqrt{6k}}(\tau_k - \mathbb{E}[\tau_k]) \to N(0,1).$$

Pertanto $\frac{1}{\sqrt{k}}(\tau_k - \mathbb{E}[\tau_k])$ converge in distribuzione per $k \to \infty$ alla variabile $N(0,6)$.

Nome:____