Dipartimento di Matematica e Fisica, Roma Tre
Pietro Caputo

2019-20, I semestre
31 agosto 2020

CP410: Esame 4, 31 agosto 2020

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nome:____

1. Consideriamo l'insieme $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ di tutte le sequenze infinite di 0 e 1, munito della piú piccola σ-algebra che rende misurabili tutti gli eventi $E_n = \{\text{la } n\text{-esima cifra è } 1\}$. Supponiamo che $\mathbb{P}$ sia la misura di probabilità su Ω tale che le cifre sono i.i.d. con distribuzione di Bernoulli di parametro $p \in (0,1)$ fissato. Consideriamo gli eventi

$$A = \{\text{ci sono infinite coppie 00 di zeri adiacenti}\}\,, \tag{1}$$

$$B = \{\text{c'è un numero finito di coppie 11 di uni adiacenti}\} \tag{2}$$

   (a) Mostrare che A e B sono misurabili;

   (b) Calcolare $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)$, e $\mathbb{P}(A \cap B)$.

Soluzione:
a). Se $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \in \Omega$ indichiamo con ω_i la cifra nella i-esima posizione. Se

$$F_i = \{\omega \in \Omega : \omega_i = \omega_{i+1} = 0\}$$

allora l'evento A si scrive come

$$A = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{i=n}^{\infty} F_i.$$

Dunque A è misurabile. Allo stesso modo, per simmetria (scambiando 0 con 1), si vede che l'evento $B^c = \{\text{ci sono infinite coppie 11 di uni adiacenti}\}$ è misurabile. Dunque anche B è misurabile.

b). Consideriamo l'evento

$$A' = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{i=n}^{\infty} F_{2i-1}.$$

Notiamo che, essendo gli F_{2i-1} eventi indipendenti e con probabilità $\mathbb{P}(F_{2i-1}) = p^2 > 0$, per il lemma di Borel-Cantelli 2 si ha $\mathbb{P}(A') = 1$. Allora, usando $A' \subset A$ abbiamo

$$\mathbb{P}(A) \geqslant \mathbb{P}(A') = 1,$$

e dunque $\mathbb{P}(A) = 1$. Allo stesso modo, scambiando 0 con 1 e usando $p < 1$, si vede che $\mathbb{P}(B^c) = 1$ e dunque $\mathbb{P}(B) = 0$. Infine $A \cap B \subset B$ e quindi $\mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(B)$, da cui segue che $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$.

Nome:____

2. Enunciare e dimostrare la legge dei grandi numeri forte sotto ipotesi di momento quarto finito.

Nome:______________________________________

3. Fare due esempi di successioni di variabili aleatorie X_n, $n = 0, 1, 2, \dots$ tali che

   (a) $\{X_n\}$ è una martingala rispetto alla filtrazione naturale $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$,

   (b) $X_n \to 0$ quasi certamente,

   e tali che nel primo caso X_n non converge in L^1, mentre nel secondo caso $X_n \to 0$ in L^1.

Soluzione:
Per il primo caso poniamo per esempio $Y_n = \sum_{i=1}^n Z_i$ dove Z_i sono variabili di Poisson di parametro 1 indipendenti e scriviamo

$$X_n = e^{n(1-e)} e^{Y_n}.$$

Poiché $\mathbb{E}[e^{Y_1}] = e^{e-1}$, notiamo che rispetto alla filtrazione $\mathcal{F}_k = \sigma(X_1, \dots, X_k)$ la $\{X_n,\, n \in \mathbb{N}\}$, con $X_0 = 1$, è una martingala non-negativa e $\{X_n\}$ è limitata in L^1. Allora per il teorema di convergenza si ha che X_n converge quasi certamente. Dalla legge dei grandi numeri sappiamo che $\frac{1}{n} Y_n \to 1$ quasi certamente. Essendo $e - 1 > 1$ si ha

$$n(e-1) - Y_n \to +\infty$$

quasi certamente e dunque $Z_n \to 0$ q.c. ma Z_n non converge in L^1 essendo $\mathbb{E}[Z_n] = 1$ per ogni n. La scelta della variabile di Poisson non è necessaria e la costruzione precedente può essere generalizzata facilmente al caso di altre variabili.

Per il secondo esempio, una scelta (banale) è la successione deterministica e costante $X_n \equiv 0$.

Nome:______________________________________

4. Sia S_n la posizione dopo n passi di una passeggiata aleatoria semplice simmetrica su $\mathbb{Z}$. Supponendo $S_0 = 0$, determinare

   (a) il valore atteso del tempo di prima uscita dall'intervallo $\{-1, 0, 1\}$.

   (b) il valore atteso del tempo di primo ritorno all'intervallo $\{-1, 0, 1\}$.

Soluzione: a). Con gli argomenti usuali basati sul teorema di optional stopping si ottiene $\mathbb{E}[\tau] = 4$, se τ indica il tempo di prima uscita dall'intervallo $\{-1, 0, 1\}$.

b). Sia τ' il tempo di primo ritorno all'intervallo $\{-1, 0, 1\}$. Notiamo che per ritornare in $\{-1, 0, 1\}$ si deve prima visitare -2 e poi da li' aspettare il tempo di prima visita di -1, oppure visitare $+2$ e poi da li' aspettare il tempo di prima visita di $+1$. usando anche la simmetria della passeggiata aleatoria, ne segue che $\tau' = \tau + \tau''$ dove τ'' è una variabile aleatoria indipendente da τ, e con la distribuzione del tempo di prima visita di -1 partendo dalla posizione -2. Dagli argomenti usuali sappiamo che questo tempo ha valore atteso infinito. Dunque $\mathbb{E}[\tau'] = \mathbb{E}[\tau] + \mathbb{E}[\tau''] = \infty$.

Nome:____

5. Siano $X_0, X_1, X_2, \dots$ variabili aleatorie i.i.d. ciascuna con funzione caratteristica

$$\varphi(\theta) = \frac{1}{(1-i\theta)}, \qquad \theta \in \mathbb{R},$$

e sia $S_n = X_0 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$.

   (a) Calcolare la funzione caratteristica di S_n per ogni $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Mostrare che S_n converge in distribuzione e descriverne il limite.

   (c) Calcolare $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n \geqslant t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Soluzione: a). Scriviamo

$$\varphi_n(\theta) = \mathbb{E}[e^{i\theta S_n}] = \mathbb{E}[e^{i\theta X_0}]\mathbb{E}[e^{i\frac{\theta}{n}\sum_{k=1}^n X_k}] = \varphi(\theta)\varphi(\theta/n)^n.$$

(b). La funzione $\varphi(\theta)$ è la funzione caratteristica di una esponenziale di parametro 1. Inoltre $\varphi(\theta/n)^n \to e^{i\theta}$ per ogni $\theta \in \mathbb{R}$ e dunque

$$\varphi_n(\theta) \to \varphi_\infty(\theta) := \varphi(\theta)e^{i\theta}.$$

Notiamo che φ_∞ è la funzione caratteristica della variabile aleatoria $X_0 + 1$, dove X_0 è una esponenziale di parametro 1. In particolare S_n converge in distribuzione alla variabile $X_0 + 1$. Osserviamo che alla stessa conclusione si poteva arrivare usando la legge dei grandi numeri. Infatti per la LGN debole $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k \to 1$ in probabilità, e dunque $X_0 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k \to X_0 + 1$ in probabilità, e la convergenza in probabilità implica convergenza in distribuzione.

c). La convergenza in distribuzione $S_n \to X_0 + 1$ implica che $\mathbb{P}(S_n \leqslant t) \to \mathbb{P}(X_0 + 1 \leqslant t)$ per ogni t punto di continuità di $X_0 + 1$. Poiché X_0 è una variabile esponenziale, ogni $t \in \mathbb{R}$ è punto di conitnuità, e la convergenza vale per ogni $t \in \mathbb{R}$. Passando all'evento complementare ne segue che

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n \geqslant t) = \mathbb{P}(X_0 \geqslant t - 1) = \begin{cases} 1 & t \leqslant 1 \\ e^{-(t-1)} & t > 1 \end{cases}$$

Nome:____

6. Siano $\{Z_i,\, i = 1, 2, \dots\}$ variabili aleatorie i.i.d. tali che $Z_i = 0, 1$ con probabilità $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ rispettivamente. Per $a, b, c, d \in \{0, 1\}$, sia τ_{abcd} il primo tempo in cui appare la sequenza $abcd$, ossia τ_{abcd} è il primo indice $i \in \mathbb{N}$, $i \geqslant 4$, tale che $(Z_{i-3}, Z_{i-2}, Z_{i-1}, Z_i) = (a, b, c, d)$.
   (a) Calcolare $\mathbb{E}[\tau_{0101}]$ e $\mathbb{E}[\tau_{0110}]$.
   (b) Calcolare $\mathbb{P}(\tau_{0101} > \tau_{0110})$.

Soluzione: a) Con gli argomenti usuali si ottiene:

$$\mathbb{E}[\tau_{0101}] = 2^4 + 2^2 = 20, \qquad \mathbb{E}[\tau_{0110}] = 2^4 + 2 = 18\,.$$

b). Sia p la probabilità $p = \mathbb{P}(\tau_{0101} > \tau_{0110})$. Con gli argomenti usuali si ottiene:

$$p(2 - (2^4 + 2)) + (1 - p)((2^4 + 2^2) - 2^2) = 0.$$

Da cui segue che $p = 1/2$.

Nome:____