Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2014-15, I semestre
4 novembre, 2014

CP410: Esonero 1, 4 novembre 2014

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nome:____

1. Si consideri lo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, dove $\Omega = [0, \infty)$, $\mathcal{F}$ sono i boreliani di $[0, \infty)$ e $\mathbb{P}$ è una misura di probabilità tale che

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{e^{-1}}{k!}\,, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

dove $A_0 = \{0\}$ e $A_k = (k-1, k]$, $k \in \mathbb{N}$. Sia inoltre, per $n \in \mathbb{N}$:

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} k 1_{A_k}.$$

(a) Si consideri la σ-algebra $\sigma(X_n)$ generata da X_n. Fare un esempio di evento $E \in \mathcal{F}$ tale che per ogni $n \geqslant 1$ si ha $E \in \sigma(X_n)$, e fare un esempio di evento $F \in \mathcal{F}$ tale che per ogni $n \geqslant 1$ si ha $F \notin \sigma(X_n)$.

(b) Dimostrare che $X_n \to X$ in L^p, per $n \to \infty$, per ogni $p > 0$, dove X è una variabile aleatoria con distribuzione Poisson di parametro 1.

Soluzione: (a). Un evento E come richiesto è per esempio $E = (0, 1] = A_1$. Piú banalmente si può prendere $E = \Omega$ oppure $E = \emptyset$. Invece per esempio l'evento $F = (0, \frac{1}{2}]$ non appartiene a $\sigma(X_n)$ per nessun n (infatti non si puo' ottenere come unione o intersezione degli A_i).

(b). Definiamo $X = \sum_{k=1}^{\infty} k 1_{A_k}$. Notiamo che X ha valori in $\{0, 1 \ldots\}$ e che

$$\mathbb{P}(X = j) = \mathbb{P}(A_j) = \frac{e^{-1}}{j!}, \qquad j = 0, 1, \ldots$$

Allora X ha distribuzione Poisson di parametro 1. Inoltre, si ha

$$X - X_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} k 1_{A_k}.$$

Essendo gli eventi A_i disgiunti si ottiene

$$|X - X_n|^p = \sum_{k=n+1}^{\infty} k^p 1_{A_k},$$

per ogni $p > 0$. Allora, per $p > 0$ si ha

$$\|X_n - X\|_p^p = \mathbb{E}[|X_n - X|^p] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=n+1}^{\infty} k^p 1_{A_k}\right] = \sum_{k=n+1}^{\infty} k^p \frac{e^{-1}}{k!} \to 0\,, \qquad n \to \infty.$$

Nome:____

2. Enunciare e dimostrare il lemma di Fatou.

Nome:______________________________________

3. Siano $X_1, X_2, \dots$ variabili aleatorie indipendenti tali che per ogni $i \in \mathbb{N}$, si ha $X_i = -1$ con probabilità $1 - \frac{1}{i^2}$ e $X_i = i^2 - 1$ con probabilità $\frac{1}{i^2}$. Sia inoltre $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Dimostrare che:

   (a) X_n tende a -1 quasi certamente, ma non in L^1.

   (b) $\frac{S_n}{n}$ tende a -1 quasi certamente, ma non in L^1.

Soluzione: a). Abbiamo $\sum_n \mathbb{P}(X_n \neq -1) = \sum_n \frac{1}{n^2} < \infty$. Per il lemma di Borel-Cantelli 1 si ha che quasi certamente $X_n \neq -1$ solo per un numero finito di indici n, ossia $X_n = -1$ definitivamente. In particolare, $X_n \to -1$ quasi certamente. Notiamo che $\mathbb{E}[X_i] = 0$ per ogni $i \in \mathbb{N}$. Se avessimo $X_n \to -1$ in L^1 si avrebbe anche $|\mathbb{E}[X_n] + 1| \leqslant \mathbb{E}[|X_n + 1|] \to 0$, $n \to \infty$, che contraddice $\mathbb{E}[X_n] = 0$.

b). Sappiamo che $X_n \neq -1$ per un numero finito di indici. Siano allora $i_1, \dots, i_k$ gli indici tali che $X_{i_1} = i_1^2 - 1, \cdots X_{i_k} = i_k^2 - 1$ e $X_j = -1$ per ogni $j \neq i_1 \dots, i_k$. Per n abbastanza grande

$$S_n = -(n-k) + \sum_{j=1}^k (i_j^2 - 1) = -n + \sum_{j=1}^k i_j^2.$$

Dividendo per n e passando al limite si ha $S_n/n \to 0$, quasi certamente. Tuttavia S_n soddisfa $\mathbb{E}[S_n] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = 0$. Come nel punto (a) sopra notiamo quindi che non si può avere $S_n/n \to -1$ in L^1.

Nome:______________________________________

4. Siano $X_1, X_2, \dots$ variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite, e sia $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Supponiamo che esista $\varepsilon > 0$ tale che

$$\mathbb{P}(X_1 \geqslant \varepsilon) \geqslant \varepsilon. \tag{1}$$

   (a) Supponendo inoltre che $\mathbb{P}(X_1 \geqslant 0) = 1$, dimostrare che quasi certamente

$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty.$$

   (b) Fare un esempio di variabile aleatoria X_1 che soddisfa (1) ma tale che quasi certamente

$$\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty.$$

Soluzione:
a) Sia $A_n = \{X_n \geqslant \varepsilon\}$. Gli eventi A_n sono indipendenti, e l'ipotesi $\mathbb{P}(A_n) \geqslant \varepsilon$ implica che $\sum_n \mathbb{P}(A_n) = +\infty$. Allora per Borel-Cantelli 2 si ha $\mathbb{P}(A_n, i.o.) = 1$. Essendo $X_i \geqslant 0$ è chiaro che $\{A_n, i.o.\} \subset \{\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty\}$. Quindi $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty) = 1$.

b). Per esempio prendiamo $X_1 = 1$ con probabilità $1/2$ e $X_1 = -2$ con probabilità $1/2$. L'ipotesi $\mathbb{P}(X_1 \geqslant \varepsilon) \geqslant \varepsilon$ è soddisfatta con $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Per la legge forte dei grandi numeri (usando per esempio il fatto che $\mathbb{E}[X_1^4] < \infty$ in questo esempio) si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mathbb{E}[X_1] = -\frac{1}{2},$$

quasi certamente. In particolare $S_n \to -\infty$, $n \to \infty$, quasi certamente.

Nome:______________________________________

5. Siano $A_1, A_2, \ldots$ eventi indipendenti su uno spazio di probabilità. Considerare gli eventi

$$E(x) := \left\{ \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{A_i} \leqslant x \right\}, \qquad x \in [0, \infty).$$

   (a) Dimostrare che per ogni x, si ha $\mathbb{P}(E(x)) \in \{0, 1\}$.
   (b) Supponendo che $\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{2}$ per ogni $i \in \mathbb{N}$, graficare la funzione $\phi(x) = \mathbb{P}(E(x))$ al variare di $x \in [0, \infty)$.

Soluzione:
a) Per la legge $0 - 1$ di Kolmogorov basta mostrare che $E(x)$ appartiene alla sigma algebra di coda

$$\mathcal{T} = \cap_{m=1}^{\infty} \mathcal{G}_m,$$

dove $\mathcal{G}_m = \sigma(A_{m+1}, A_{m+2}, \ldots)$. Basta allora mostrare che $g := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}$ è $\mathcal{G}_m$-misurabile per ogni m. Notiamo che per ogni m si ha

$$g = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=m+1}^{n} 1_{A_i}.$$

La funzione $g_{n,m} := \frac{1}{n} \sum_{i=m+1}^{n} 1_{A_i}$ è chiaramente $\mathcal{G}_m$-misurabile per ogni $n > m$, e dunque anche $\limsup_{n\to\infty} g_{n,m} = g$.

b) Se supponiamo $\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{2}$ per ogni $i \in \mathbb{N}$, allora la legge dei grandi numeri forte implica che $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{A_i} = \frac{1}{2}$, quasi certamente. Ne segue che

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{se } x \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$