Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2015-16, I semestre
3 novembre, 2015

CP410: Esonero 1, 3 novembre 2015

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nome:______________________________________

1. Si consideri lo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, dove $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F}$ sono i boreliani di $[0,1]$ e $\mathbb{P}$ è la misura di Lebesgue su $[0,1]$. Siano X_k, per $k = 1, 2, \ldots$, le variabili aleatorie definite da
$$X_k(\omega) = 1_{[0,\frac{1}{k}]}(\omega) + 1_{[1-\frac{1}{k},1]}(\omega)\,, \quad \omega \in [0,1].$$
   (a) Scrivere la funzione di distribuzione F_k della variabile X_k
   (b) Dire se le X_k, $k = 1, 2, \ldots$ sono indipendenti.
   (c) Dire se X_k converge quasi certamente per $k \to \infty$.

Soluzione:
(a). Se $k \geqslant 3$, per definizione abbiamo che $X_k(\omega)$ vale 1 se $\omega \in \Omega_k := [0, \frac{1}{k}] \cup [1 - \frac{1}{k}, 1]$ e zero altrimenti. Dunque X_k vale 1 con probabilità $p_k := 2/k$ e zero con probabilità $1 - p_k$. Allora, per $k \geqslant 3$:
$$F_k(x) = \mathbb{P}(X_k \leqslant x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - p_k & 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & x \geqslant 1 \end{cases}$$
Nel caso $k = 1$ si ha $\Omega_1 = [0,1]$, e $X_1(\omega) = 2$, per ogni $\omega \in [0,1]$. Dunque,
$$F_1(x) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ 1 & x \geqslant 2 \end{cases}$$
Nel caso $k = 2$ invece, $\Omega_2 = [0,1]$, ma
$$X_2(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in [0,1],\ \omega \neq \frac{1}{2} \\ 2 & \omega = \frac{1}{2} \end{cases}$$
Allora X_2 vale 1 con probabilità 1. Ne segue che
$$F_2 = \mathbb{P}(X_2 \leqslant x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & x \geqslant 1 \end{cases}$$

(b). Le X_k non sono indipendenti. Per esempio $X_k = 0$ implica $X_{k+1} = 0$.

(c). X_k converge quasi certamente a zero per $k \to \infty$. Infatti se $\omega \in (0,1)$ allora $X_k(\omega) \to 0$, e dunque
$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega :\ X_k(\omega) \to 0\}) = \mathbb{P}((0,1)) = 1.$$

[Osservazione: se $E_k = \{X_k = 1\}$, allora $\sum_{k=2}^{\infty} \mathbb{P}(E_k) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{k} = +\infty$. Tuttavia non possiamo concludere che $\{E_n, i.o.\}$ ha probabilità 1 poiché gli eventi non sono indipendenti. In effetti per quanto visto sappiamo che $\{E_n, i.o.\}$ ha probabilità 0.]

Nome:____

2. Consideriamo un processo di ramificazione ottenuto partendo da un singolo individuo, con la regola che a ogni generazione ciascun individuo dà indipendentemente vita a un numero di individui aleatorio con distribuzione di Poisson di parametro $\lambda > 0$. Sia X_n il numero di individui presente nella n-esima generazione, con $X_0 = 1$.

   (a) Sapendo che $X_{n-1} = k$, calcolare il valore atteso di X_n in funzione di $k \in \mathbb{N}$.

   (b) Calcolare il valore atteso di X_n, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

   (c) Per quali valori di λ sappiamo che $\lim_{n\to\infty} X_n = 0$ q.c. ?

Soluzione:
(a). Se $X_{n-1} = k$ allora abbiamo $X_n = \sum_{i=1}^{k} Z_i$, dopve Z_i sono Poisson di parametro λ indipendenti. Ne segue che

$$\mathbb{E}[X_n | X_{n-1} = k] = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}[Z_i] = k\lambda.$$

(b). Abbiamo

$$\mathbb{E}[X_n] = \lambda^n,$$

come si ottiene per induzione. Infatti, è vera per $n = 0$. Supponendo che sia vera per n allora

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{n+1}] &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[X_{n+1} | X_n = k] \mathbb{P}(X_n = k) \\ &= \sum_{k=0} \lambda k \mathbb{P}(X_n = k) = \lambda \mathbb{E}[X_n] = \lambda^{n+1}. \end{aligned}$$

(c). Osserviamo che $\lim_{n\to\infty} X_n = 0$ equivale all'evento di estinzione $\{\exists n : \ X_n = 0\}$. Dall'analisi del punto fisso della funzione $f(\theta) = \mathbb{E}[\theta^{X_1}]$, $\theta \in [0, 1]$, sappiamo che $X_n \to 0$ q.c. se e solo se $\mathbb{E}[X_1] = \lambda \leqslant 1$.

Nome:____

3. Dimostrare:
   (a) la legge dei grandi numeri debole sotto ipotesi di momento secondo finito;
   (b) la legge dei grandi numeri forte sotto ipotesi di momento quarto finito.

Nome:______________________________________

4. Siano $X_1, X_2, \ldots$ variabili aleatorie IID con funzione di distribuzione

$$F(x) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leqslant 1 \\ 1 - x^{-2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Dimostrare che:

(a) $\liminf_{n\to\infty} X_n = 1$, q.c.

(b) $\limsup_{n\to\infty} \dfrac{X_n}{\sqrt{n}} = +\infty$, q.c.

Soluzione: (a). Osserviamo che, essendo $F(1) = 0$, le variabili X_i soddisfano $X_i \geqslant 1$ q.c. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e definiamo gli eventi

$$G_n = \{X_n \leqslant 1 + \varepsilon\}.$$

Notiamo che

$$\mathbb{P}(G_n) = F(1+\varepsilon) = 1 - \frac{1}{(1+\varepsilon)^2},$$

per ogni $n \geqslant 1$. In particolare, per $\varepsilon > 0$ fissato si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(G_n) = +\infty$. Dal lemma BC2 segue che $\{G_n, i.o.\}$ ha probabilità 1, e dunque

$$\liminf_{n\to\infty} X_n \leqslant 1 + \varepsilon, \qquad \text{q.c.}$$

Essendo ε arbitrario, e $X_n \geqslant 1$ q.c., si ha

$$\liminf_{n\to\infty} X_n = 1, \qquad \text{q.c.}$$

[Notiamo che lo stesso argomento dimostra una stima piu' forte, ossia che

$$\liminf_{n\to\infty} n(X_n - 1) = 0.$$

Infatti basta prendere $\varepsilon = s/n$ nell'argomento precedente per ottenere $\{n(X_n - 1) \leqslant s, i.o.\}$ q.c. per ogni $s > 0$. Ma s è arbitrario e dunque $\liminf_{n\to\infty} n(X_n - 1) = 0$ q.c.]

(b). Fissiamo $t > 0$ e consideriamo gli eventi

$$E_n = \{X_n > tn^{1/2}\}.$$

Notiamo che

$$\mathbb{P}(E_n) = 1 - F(tn^{1/2}) = \frac{1}{t^2\, n},$$

per ogni $n \geqslant 1$ tale che $t^2\, n > 1$. In particolare, si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n) = +\infty$. Dal lemma BC2 segue che $\{E_n, i.o.\}$ ha probabilità 1, e dunque

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\sqrt{n}} \geqslant t, \qquad \text{q.c.}$$

Essendo t arbitrario, si ha

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\sqrt{n}} = +\infty, \qquad \text{q.c.}$$

Nome:____

5. Sia X_n una successione di variabili aleatorie tali che $X_n \to X$ q.c., dove X è una variabile aleatoria con $\mathbb{E}[X] = 0$.

   (a) Dimostrare che
   $$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[e^{X_n}] \geqslant 1.$$

   (b) Supponendo che $|X_n| \leqslant 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e che $X = 0$ q.c., dimostrare che
   $$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[e^{X_n}] = 1.$$

Soluzione: (a). Poiché $e^{X_n} \to e^X$ q.c., per il lemma di Fatou:
$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[e^{X_n}] \geqslant \mathbb{E}[e^X].$$
Per la disuguaglianza di Jensen:
$$\mathbb{E}[e^X] \geqslant e^{\mathbb{E}[X]} = 1.$$

(b). Segue dal teorema di convergenza dominata.

Nome:____