Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2016-17, I semestre
7 novembre, 2016

CP410: Esonero 1, 7 novembre 2016

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nome:____

1. Si consideri lo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, dove $\Omega = [0, \infty)$, $\mathcal{F}$ sono i boreliani di $[0, \infty)$ e $\mathbb{P}$ è la misura di probabilità su $[0, \infty)$ definita da:

$$\mathbb{P}(A) = \int_0^\infty e^{-x} 1_A(x) dx \qquad A \in \mathcal{F}\,.$$

Siano X_k, per $k = 1, 2, \ldots$, le variabili aleatorie

$$X_k(\omega) = 1_{[0, \log k]}(\omega).$$

(a) Scrivere la funzione di distribuzione della variabile X_k

(b) Scrivere la funzione di distribuzione della variabile $\liminf_{k\to\infty} X_k$

(c) Calcolare la probabilità dell'evento $\{X_k = 0, \text{ i.o.}\}$.

Soluzione:
(a). Per definizione abbiamo che $X_k(\omega)$ vale 1 se $\omega \in [0, \log k]$ e zero altrimenti. Dunque X_k vale 1 con probabilità

$$\mathbb{P}([0, \log k]) = \int_0^{\log k} e^{-x} = 1 - e^{-\log k} = 1 - \frac{1}{k},$$

e zero con probabilità $\frac{1}{k}$. Allora

$$F_k(x) = \mathbb{P}(X_k \leqslant x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/k & 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & x \geqslant 1 \end{cases}$$

(b). Notiamo che se $\omega \in [0, \infty)$, allora esiste $j \in \mathbb{N}$ tale che $\omega \in [0, \log j]$, e dunque $X_k(\omega) = 1$ per ogni $k \geqslant j$. In particolare $X_k(\omega)$ converge a 1 per $k \to \infty$, per ogni $\omega \in \Omega$, e dunque $X_k \to 1$ q.c. Ne segue che $\liminf_{k\to\infty} X_k = 1$ q.c. e dunque la sua funzione di distribuzione vale $F(x) = 0$ se $x < 1$ e $F(x) = 1$ se $x \geqslant 1$.

(c). Per quanto visto al punto (b) sappiamo che per ogni $\omega \in \Omega$ esiste un intero j tale che $X_k(\omega) = 0$ per ogni $k < j$ e $X_k(\omega) = 1$ per ogni $k \geqslant j$. Allora $\{\omega \in \Omega : \ X_k(\omega) = 0 \text{ i.o.}\} = \emptyset$ e dunque la probabilità richiesta è zero.

Nome:____

2. Siano Y_k variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione Poisson di parametro $\lambda = 1$. Consideriamo la successione di v.a.
$$X_k = a_k Y_k^2,$$
dove $\{a_k\}$ è una successione numerica limitata assegnata. Poniamo
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (X_k - \mathbb{E}[X_k]).$$
Dimostrare che:
   (a) $\frac{S_n}{n} \to 0$ q.c.
   (b) se $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = 1$, allora $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \to 2$, q.c.

Soluzione:
(a). Se a_k è limitata abbiamo
$$\sup_k \mathbb{E}[X_k^4] = \mathbb{E}[Y_1^8] \sup_k a_k^4 < \infty,$$
dove usiamo il fatto che una variabile di Poisson ha tutti i momenti finiti e in particolare $\mathbb{E}[Y_1^8] < \infty$. Dunque vale la legge dei grandi numeri forte:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0\,, \qquad \text{q.c.} \tag{1}$$
(b). Abbiamo
$$\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k (Y_k^2 - \mathbb{E}[Y_k^2]) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{\mathbb{E}[Y_1^2]}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k. \tag{2}$$
Calcoliamo
$$\mathbb{E}[Y_1^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{e^{-1}}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\frac{e^{-1}}{k!} + \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{e^{-1}}{k!} = 1 + 1 = 2$$
Allora la conclusione segue da (1)-(2).

Nome:____

3. Dimostrare i due lemmi di Borel Cantelli.

Nome:____

4. Per $\alpha > 0$ fissato, sia X la variabile aleatoria con funzione di distribuzione $F(x) = 1 - G(x)$, dove

$$G(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leqslant 1 \\ x^{-\alpha} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

   (a) Per quali valori di $p > 0$ si ha $X \in L^p$?

   (b) Se $\{X_n\}$ sono variabili aleatorie i.i.d. con funzione di distribuzione F, dimostrare che

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{n^{1/\alpha}} = +\infty\,, \qquad \text{q.c.}$$

Soluzione: (a). Osserviamo che $X \geqslant 1$ q.c., essendo $F(1) = 0$. Si ha

$$\mathbb{E}[X^p] = \int_1^\infty x^p dF(x) = \alpha \int_1^\infty x^p x^{-\alpha-1} dx.$$

L'integrale è finito se e solo se $p < \alpha$, ovvero $X \in L^p$ se e solo se $p < \alpha$.

(b). Fissiamo $T > 0$ e consideriamo gli eventi

$$E_{n,T} := \{X_n > T n^{1/\alpha}\}.$$

Notiamo che

$$\mathbb{P}(E_{n,T}) = G(T n^{1/\alpha}) = \frac{1}{T^\alpha n},$$

per ogni $n \geqslant 1$ tale che $T^\alpha n > 1$. In particolare, si ha $\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(E_{n,T}) = +\infty$. Dal lemma BC2 segue che $A_T := \{E_{n,T},\ \text{i.o.}\}$ ha probabilità 1, e dunque

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{n^{1/\alpha}} \geqslant T, \qquad \text{q.c.}$$

Essendo T arbitrario, per monotonia si ha

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{n^{1/\alpha}} = +\infty\right) = \lim_{T\to\infty} \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{n^{1/\alpha}} \geqslant T\right) = 1.$$

Nome:____

5. Si considerino lanci indipendenti di una moneta equa. Sia X_i la variabile aleatoria definita come segue: $X_i = 1$ se l'i-esimo e l'$(i+1)$-esimo lancio sono entrambi "testa", e $X_i = 0$ altrimenti. Sia $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

   (a) Calcolare la varianza di S_n.

   (b) Dimostrare che $\frac{S_n}{n}$ converge in probabilità per $n \to \infty$.

Soluzione: (a). Scriviamo

$$\mathrm{Var}(S_n) = \sum_{i,j=1}^n \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$

Per $i < j-1$, sappiamo che X_i e X_j sono indipendenti. Allora,

$$\mathrm{Var}(S_n) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{Cov}(X_i, X_{i+1})$$

Calcoliamo

$$p := \mathbb{E}[X_i] = \mathbb{P}(i\text{-esimo e } (i+1)\text{-esimo lancio sono entrambi "testa"}) = \frac{1}{4}.$$

Dunque $\mathrm{Var}(X_i) = p - p^2 = \frac{3}{16}$. Inoltre, notiamo che

$$\mathbb{E}[X_i X_{i+1}] = \mathbb{P}(i\text{-esimo, } (i+1)\text{-esimo e } (i+2)\text{-esimo lancio sono tutti "testa"}) = \frac{1}{8}.$$

Quindi $\mathrm{Cov}(X_i, X_{i+1}) = \mathbb{E}[X_i X_{i+1}] - \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_{i+1}] = \frac{1}{16}$. In conclusione

$$\mathrm{Var}(S_n) = \frac{3n}{16} + \frac{2(n-1)}{16} = \frac{5n}{16} - \frac{1}{8}.$$

(b). Per la disuguaglianza di Markov: $\forall \varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|\tfrac{S_n}{n} - p| \geqslant \varepsilon) = \mathbb{P}((S_n - pn)^2 \geqslant \varepsilon^2 n^2) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2 n^2}\mathbb{E}[(S_n - pn)^2] = \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{\varepsilon^2 n^2} \leqslant \frac{5}{16\varepsilon^2 n} \to 0.$$

Dunque $\frac{S_n}{n} \to p$ in probabilità per $n \to \infty$.

Nome:____